universite PARIS-SACLAY | IUT DE CACHAN

GEII

Mathématiques

Semestre 3

Travaux Dirigés
Mathématiques appliquées

Année 2023–2024

Nom :
Prénom :
Groupe :

Table des matières

La confiture n'est bonne que s'il faut monter sur une chaise pour attraper le pot dans le placard.
A. Vialatte

Chapitre 1

Suites et séries numériques

Exercice 1 ***Attention à l'écriture !***

Soit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par

$$u_n = \frac{7}{8}n^2, \qquad v_n = 3n+4, \qquad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Calculer :

1. u_{10+2} et $u_{10}+2$,
2. v_{3^2} et v_3^2,
3. w_{v_3}.

Exercice 2 ***Calcul des premiers termes***

Calculer les 3 premiers termes de la suite (pour les suites définies de manière récurrente on prendra $U_0 = 1$) :

1. $U_{n+1} = 2U_n + 1$,
2. $U_{n+1} = 2^{U_n} + 1$,
3. $U_{n+1} = 2U_n + n$.

Exercice 3 ***Arithmétiques ou géométriques ?***

Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre (pour les suites définies de manière récurrente on prendra $U_0 = 1$).

1. $U_n = \frac{2}{3^n}$,
2. $U_{n+1} = U_n + 5$,
3. $U_{n+1} = 5U_n + 1$,
4. $U_n = 2 + n$,
5. $U_{n+1} = \frac{U_n}{2}$.

Exercice 4 ***Limites de suites géométriques***

Montrer que les suites sont des suites géométriques et les écrire sous la forme $U_0 \times q^n$ puis déterminer la limite en $+\infty$.

1. $U_n = 2^{n+1}$,
2. $U_n = (\sqrt{2})^{3n}$,
3. $u_n = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{-2n}$,
4. $u_n = \frac{2^n}{3^{2n}}$.

Exercice 5 ***Calcul de sommes***
Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{10} 5k+4$,
2. $\sum_{n=2}^{6} 3\times 2^n$,

Exercice 6 ***Calculs de sommes infinies***
Soit $N \in \mathbb{N}$ et $S_N = \sum_{k=1}^{N} u_k$. Dans chacun des cas suivants, exprimer S_N en fonction de N puis en déduire $\lim_{N\to\infty} S_N$.

1. $u_n = 0.1$
2. $u_n = n$
3. $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$
4. $u_n = 2^n$
5. $u_n = (-1)^n$

Exercice 7 ***Divergence de séries par comparaison***
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
   (a) En remarquant que, pour tout $k \in \{1 \dots N\}$ on a $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$; Montrer que $S_N \geq \sqrt{N}$.
   (b) Calculer $\lim_{N\to\infty} S_N$. La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?
2. Soit $H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que : $H_4 \geq 2$, $H_8 \geq \frac{5}{2}$ et $H_{16} \geq 3$.
   On admet que $\forall n \geq 2,\ H_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

Exercice 8 ***Télescopage***
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2+3n+2}$. On note $S_N = \sum_{k=1}^{N} u_k$.
   (a) Calculer S_1, S_2, S_3.
   (b) Déterminer deux réels a et b tels que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \dfrac{a}{n+2} + \dfrac{b}{n+1}$.
   (c) Exprimer S_N en fonction de N puis en déduire $\lim_{N\to\infty} S_N$.
2. Pour tout $N \geq 2$, on pose
$$S_N = \sum_{k=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$
   (a) Calculer $S_2,\ S_3,\ S_4$.
   (b) Montrer que : $\forall k \geq 2,\ u_k = \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)$.

(c) En déduire l'expression de $S_N = \sum_{k=2}^{N} u_k$ en fonction de N, puis la valeur de la somme $S = \lim_{N\to\infty} S_N$.

Exercice 9 ***Séries géométriques***

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

1. $\sum \frac{3}{2^n}$
2. $\sum \left(\frac{3}{2}\right)^n$
3. $\sum 5^{-n}$
4. $\sum 2^{-4n+3}$
5. $\sum \frac{2^n-3}{3^n+4}$

Exercice 10 ***Équivalence en*** $+\infty$ & ***critère de Riemann***

1. Les suites U_n et V_n sont elles équivalentes en $+\infty$?

   (a) $U_n = \frac{2n+3}{n-2}$ et $V_n = 2$

   (b) $U_n = \frac{n^2}{2n^3-3n^2+1}$ et $V_n = \frac{1}{n}$

   (c) $U_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $V_n = \frac{1}{n}$

   (d) $U_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ et $V_n = \frac{1}{n^3}$

2. Pour chacun des cas précédent, en déduire la nature des séries de termes général U_n.

Exercice 11 ***Comparaison*** & ***critère de Riemann***

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

1. $\sum \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\sum \frac{1}{n!}$
3. $\sum \frac{1}{\ln(n)}$
4. $\sum \frac{\sin^2(n)}{n\sqrt{n}}$

Compléments

Exercice 12

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0.

1. Déterminer q et U_0 sachant que $U_3 = \frac{1}{32}$ et $U_6 = \frac{1}{2048}$.
2. Déterminer, en fonction de N, la valeur de $S_N = \sum_{k=2}^{N} U_k$.
3. Que vaut la limite de S_N quand N tend vers $+\infty$?

Exercice 13

Dans chacun des cas ci-dessous exprimez u_n en fonction de n.

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_3 = 2$ et $u_{11} = 0$.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que : $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = 510$.

Exercice 14 Soit la série :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Exprimer S_N en fonction de N.
3. En déduire la nature de la série.

Exercice 15 les questions suvantes sont indépendantes.

1. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^7}{(\sqrt{n}+3)(n^2+2)^4}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^2}{9}\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^3}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{3n+1}\right)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1,1)^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{n}\right)$

2. Donner un exemple de suite géométrique (U_n) telle que la série de terme général U_n converge vers la valeur -2 : c'.-à-d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = -2$.

Exercice 16

1. On sait que la série de terme général $U_n = 3^{-2n+1}$ converge. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$?
2. On sait que la série de terme général $V_n = \dfrac{1}{n^2+5n+6}$ converge. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$?
3. Donner un exemple de suite (W_n) telle que la série de terme général W_n converge vers 7 : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = 7$.

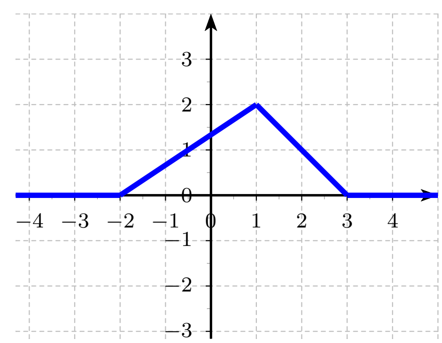
Chapitre 2

Révisions sur le calcul intégral

Exercice 1 ***Calculs de primitives***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{2} I + \alpha t \mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^{2} 2t^5 - 5t^3 + 4t\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3}{1-2x}\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+3}\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+9}\mathrm{d}t$
7. $I_8 = \displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ où f est la fonction définie par le graphe suivant



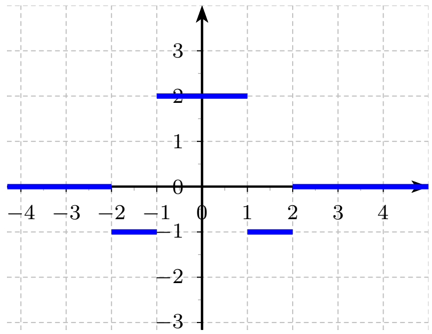
Exercice 2 ***Fonctions trigonométriques***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(4x)\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\cos(3x)\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(t)\cos(x)\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(t)\cos(x)\mathrm{d}x$

Exercice 3

On considère la fonction définie par le graphe suivant



1. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)
3. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 4 ***Linéarisation ?***

Calculer

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\mathrm{d}t$
2. $J = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(2t)\cos(3t)\mathrm{d}t$
3. $K = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(6t)\cos^2(5t)\mathrm{d}t$
4. $L = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos(3t)\mathrm{d}t$
5. $M = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$

Exercice 5 ***D.E.S. ?***

Calculer

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2-3x+2}dx$
2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{(x-2)(x^2-4)}dx$
3. $K = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^3+2}{x^3-x^2+x-1}dx$

Exercice 6 ***I.P.P !***

A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 (1-t)e^{t-3}\mathrm{d}t$
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t$
3. $K = \displaystyle\int_0^1 \arcsin(x)\mathrm{d}x$

On rappelle que la dérivée de arcsin est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 7 ***Changement de variable***

1. Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x$
2. Calculer $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$ en posant $x = \mathrm{e}^u$.

Compléments

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)dx$
2. $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln(x)}dx$
3. $K = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^4\tan^5(t)dt$
4. $L = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)dx$
5. $M = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$
6. $N = \displaystyle\int_2^3 \frac{5x^2+21x+22}{(x+3)(x^2+2x-3)}dx$
7. $O = \displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}dx$
8. $P = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\sin^2(x)dx$ (on pourra poser $u = \sin(x)$)
9. $Q = \displaystyle\int_1^e \frac{2y^6+3}{y^5+7}dz$

Exercice 9 Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$$

Exercice 10 Soit $0 < a < b$, calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}$$

On pourra poser $t = a\cos^2(u) + b\sin^2(u)$.

Exercice 11 Déterminer une primitive de la fonction suivante :

$$f(x) = (x^2-x+3)e^{2x}$$

Chapitre 3

Séries de Fourier

Exercice 1

Mettre sous la forme $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, avec $A > 0$, les signaux suivants :

1. $s(t) = \cos(5\pi t) + \sin(5\pi t)$
2. $s(t) = \cos(25\pi t) + \sqrt{3}\sin(25\pi t)$
3. $s(t) = -\sin(3\pi t)$
4. $s(t) = -3\cos(-2\pi t)$

Exercice 2 ***Valeur moyenne***

Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer la valeur moyenne.

1. $f(t) = \cos(2\pi t)$
2. $f(t) = -4 + 5\sin(3\pi t)$
3. f est de période 2 avec $f(t) = t$ sur $[0, 2[$
4. f est de période 2 avec $f(t) = t$ sur $[-1, 1[$

Exercice 3 ***Spectre***

Représenter les spectres de phase (par rapport au sinus) et d'amplitude de chaque signal temporel :

1. $f(t) = 6\cos(10\pi t) - 5\cos(20\pi t) + 3\cos(30\pi t) + \sqrt{3}\cos(40\pi t)$
2. $f(t) = -2 + 4\sqrt{2}\sin(50\pi t) + 2\sqrt{2}\sin(100\pi t) + \sqrt{2}\sin(200\pi t) - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin(300\pi t)$
3. $f(t) = 2 + 3\cos(100\pi t) + 5\cos(200\pi t) + 5\sin(200\pi t) + \sqrt{3}\cos(400\pi t) - \sin(400\pi t) + 4\sin(800\pi t)$
4. $f(t) = \dfrac{1}{2} + \cos(\omega t) + 5\cos(2\omega t) + 5\sin(2\omega t) + \sin(3\omega t) - \cos(3\omega t) - \sqrt{2}\cos(4\omega t)$

Exercice 4 ***Énergie moyenne***

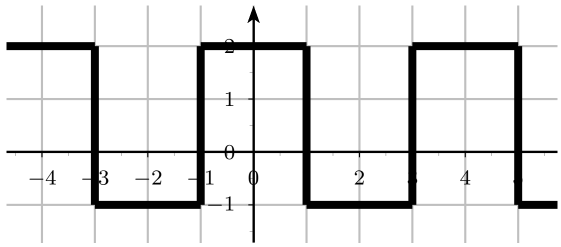
Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer l'énergie moyenne.

1. $f(t) = \cos(2\pi t)$
2. f est de période 2π avec $f(t) = 2$ sur $[0, \pi[$ et $f(t) = 0$ sur $[\pi, 2\pi[$
3. f est de période 2 avec $f(t) = t$ sur $[0, 2[$

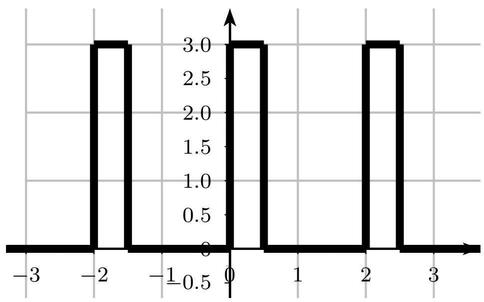
Exercice 5 ***Valeur moyenne***

Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer la valeur moyenne.

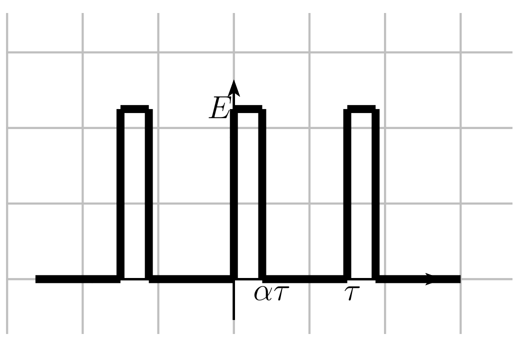
1.



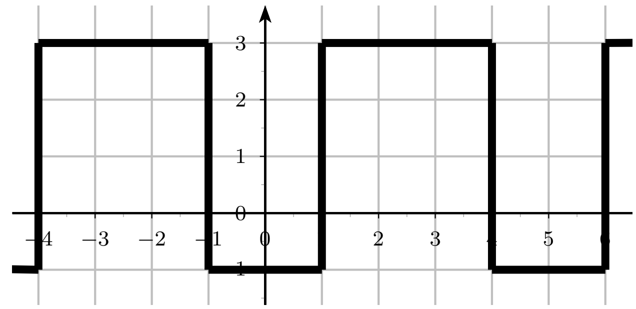
2.



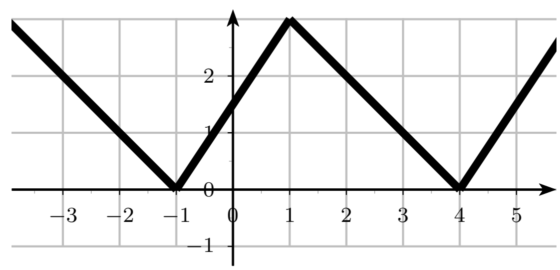
3.



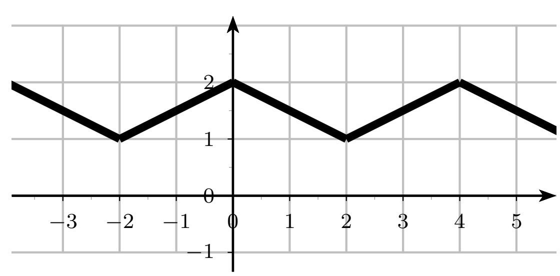
4.



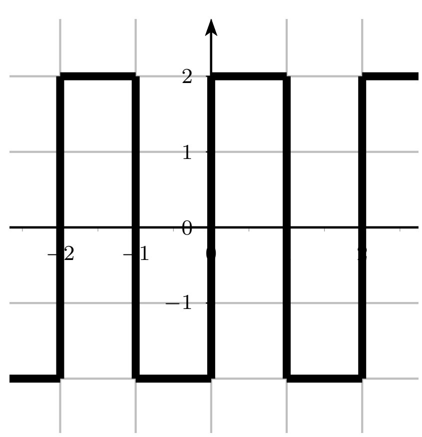
5.



6.



Exercice 6 ***Série de Fourier*** On considère le signal temporel s suivant :



1. Quelle(s) propriétés peut-on donner ? (périodicité, parité, amplitude...)
2. Quelle est la valeur moyenne du signal ?
3. Calculer les coefficients de Fourier de ce signal.
4. Donner les spectres de phase et d'amplitude des 5 premières harmoniques de la série de Fourier.
5. On appelle S_N la fonction définie sur $[-2;2]$ par

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f.

(a) Tracer à la main S_2 sur $[-2;2]$.

(b) À l'aide d'un logiciel graphique, représenter la fonction S_6 sur $[-2;2]$.

Exercice 7 ***Calculs de coefficients de Fourier***

On considère la fonction f périodique, de période 2π et telle que $f(t) = t$ pour tout $t \in [0; 2\pi[$.

1. Calculer les coefficient de Fourier de f puis écrire le développement en série de f.
2. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique définie par : $g(t) = t$ sur $[-\pi; \pi[$.

Exercice 8 ***Calculs de coefficients de Fourier***

Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $f(t) = 2 + \cos(t) + \sin(2t)$.

Exercice 9 ***Calculs de coefficients de Fourier***

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = |\sin(t)|$.

1. Déterminer la série de Fourier de u.
2. Déduire du développement en série de Fourier de u, les développements en série de Fourier des fonctions g et h définies par

$$g(t) = |\cos(t)| \quad \text{et} \quad h(t) = \max\{0, \sin(t)\}$$

Exercice 10 ***Calculs de coefficients de Fourier***

Soit f la fonction 2π périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si} \quad t \in]-\pi, \pi[\\ \dfrac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} & \text{si} \quad t = \pi \end{cases}$$

Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de f.

Exercice 11 ***Série de Fourier et énergie moyenne***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

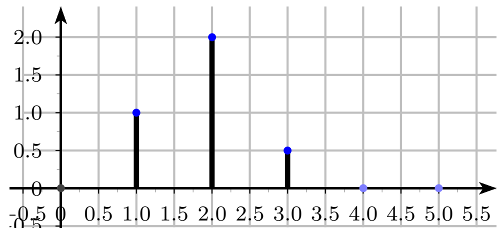
$$\begin{cases} f \text{ est périodique de période } 2 \\ f(t) = \dfrac{t}{2} \text{ pour } 0 \leq t < 1 \\ f(t) = 1 - \dfrac{t}{2} \text{ pour } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

1. Représenter f sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Tracer le spectre d'amplitude des 4 premières harmoniques de la série de Fourier de f.
4. Calculer $U_{eff}^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f^2(t)\mathrm{d}t$.
5. Calculer $V_{eff}^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$ et comparer ce résultat à U_{eff}^2.

Exercice 12 ***Énergie moyenne***

Soit f un signal 2π périodique de valeur moyenne nulle. On donne le spectre d'amplitude de f :



Déterminer la valeur de l'énergie moyenne $E(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 13 ***Pour aller plus loin !***

Soit le signal f, 2π-périodique, défini sur $[0; 2\pi[$ par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in [0;\pi] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]\pi; 2\pi[\end{cases}$$

Et soit h le signal défini par $h(t) = f(-t) + f(t)$.

1. Représenter f puis h sur $[-2\pi; 2\pi]$.
2. Sachant que les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont :

$$\begin{cases} a_0 = & \dfrac{\pi}{4} \\ a_n = & \dfrac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\ b_n = & \dfrac{-1}{n}(-1)^n \end{cases}$$

   Montrer que la série de Fourier de h est

$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos(nt).$$

3. Calculs de sommes :
   (a) En posant $t = 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
   (c) Calculer l'énergie moyenne de h.
   (d) Grâce à l'identité de Parseval appliquée à h, montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

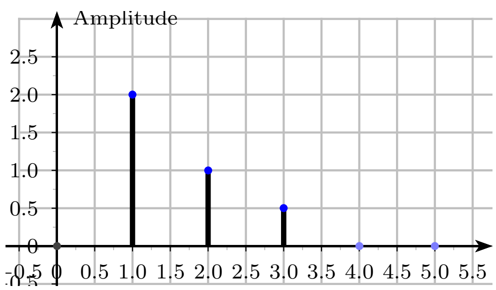
Exercice 14 ***Extrait de DS 2017***
Les questions suivantes sont indépendantes

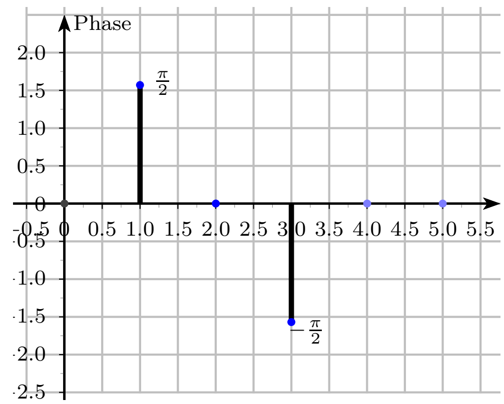
1. Soit le signal suivant :

$$f(t) = 2\cos(50\pi t) - \cos(100\pi t) + \sin(100\pi t) - 3\sin(200\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(300\pi t) + \frac{1}{4}\sin(300\pi t)$$

   Tracer le spectre d'amplitude du signal.

2. On considère les spectres d'amplitudes et de phases (par rapport au cosinus), tracé en fonction des pulsations, suivants :





   Donner un exemple de fonction dont les spectres correspondent aux spectres ci-dessus.

3. Déterminer une fonction 2π-périodique dont les coefficients de Fourier vérifient :

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 2 \qquad b_1 = -1 \qquad a_3 = 4$$

4. On connaît les coefficients de Fourier exponentiels d'un signal f :

$$c_n = \frac{1}{2i\pi n} \times e^{in\frac{\pi}{2}}$$

   Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Compléments

Exercice 15

1. Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par : $f_1(x) = e^x$.
2. Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique et impaire définie sur $[0, \pi]$ par : $f_2(x) = e^x$.
3. Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique et paire définie sur $[0, \pi]$ par : $f_3(x) = e^x$.

Exercice 16

1. Développer en série de Fourier la fonction f de période T définie par

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ pour } 0 < t < \tau \\ f(t) = 0 \text{ pour } \tau < t \leq T \end{cases}$$

2. Déterminer A_n et φ_n pour que le terme général de cette série se mette sous la forme

$$u_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n).$$

3. Donner alors la valeur de $\dfrac{\tau}{T}$ pour que seules subsistent les harmoniques impaires dans ce développement.
4. A l'aide de la formule de Parseval, trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 17

On considère la fonction f périodique, de période 2π et telle que $f(t) = t$ pour tout $t \in [0; 2\pi[$.

1. Calculer les coefficient de Fourier de f puis écrire le développement en série de f.
2. Tracer le spectre de module des 4 premières harmoniques du développement en série de Fourier de f.
3. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique définie par : $g(t) = t$ sur $[-\pi; \pi[$.
4. En utilisant le théorème de Dirichlet pour la fonction f et une valeur judicieusement choisie de t, déduire un développement en série numérique de $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 18

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0, \pi[\\ 0 \text{ si } x = \pi \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 19 ***Concours commun ENSEA 2012***

On note f la fonction impaire de période 2π, avec

$$\begin{cases} f(t) = -1 \text{ si } 0 < t < 1 \\ f(t) = 0 \text{ si } 1 < t < \pi \end{cases}$$

On note $S(t)$ la série de Fourier de f : $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

Calculer les coefficients de Fourier, comparer $f(t)$ et $S(t)$. Calculer $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Répondre par VRAI ou FAUX à chacun des items suivants :

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.
2. On a $b_n = -\dfrac{4}{n}\sin^2(n)$.
3. La série $S(t)$ converge en tout t vers $f(t)$
4. On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^3\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
5. La formule de Parseval donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^4\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\pi}{16}$.

Exercice 20

1. Soit le signal f, 2π-périodique, défini sur $[0;2\pi[$ par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in [0;\pi] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]\pi;2\pi[\end{cases}$$

   (a) Représenter f sur $[-2\pi;2\pi]$.

   (b) Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

   (c) Écrire la série de Fourier de f

2. On considère la fonction périodique définie par $g(t) = f(-t)$.

   (a) Représenter g sur $[-2\pi;2\pi]$.

   (b) Sans calculer ses coefficients, écrire la série de Fourier de g

3. On considère la fonction périodique définie par $h(t) = g(t) + f(t)$.

   (a) Représenter h sur $[-2\pi;2\pi]$.

   (b) Montrer que la série de Fourier de h est

$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt)$$

   (c) En remplaçant t par 0 dans l'expression de Fourier de h, déterminer la valeur de la limite de la série convergente suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Chapitre 4

Produit de convolution

Pour s'amuser : https ://www.geogebra.org/m/SPxmTP6r

Exercice 1 ***Dirac***

1. Représenter les signaux suivantes :

   (a) $f(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t)$

   (b) $f(t) = \cos(t)\delta(t - \frac{\pi}{3})$

   (c) $f(t) = \mathcal{U}(t-1)$

   (d) $f(t) = t\mathcal{U}(t) - t\mathcal{U}(t-1)$

   (e) $f(t) = \dfrac{t}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\delta(t-k)$

   (f) $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{6}\cos(t)\,\delta\left(t - \frac{k\pi}{6}\right)$

2. Calculer les "intégrales" suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(t)\delta(t)$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\delta(t-\frac{\pi}{6})$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\mathcal{U}(t-2)dt$

Exercice 2 ***Convolution de signaux causaux***

Calculer le produit de convolution entre f et g :

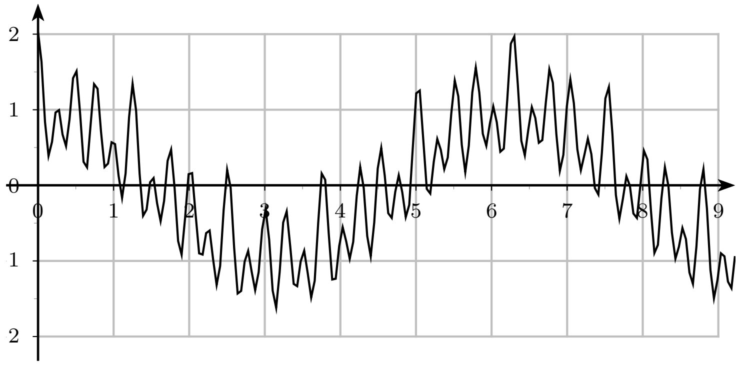
1. $f(t) = (1-t)\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = e^{t}\mathcal{U}(t)$
2. $f(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$
3. $f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = e^{-bt}\mathcal{U}(t)$ en fonction des réels a et b.

Exercice 3 ***Atténuation du bruit***

Le signal f est un cosinus auquel on a ajouté un « bruit »

$$f(t) = \left(\cos(t) + \left(\frac{1}{5}\cos(10t) + \frac{1}{3}\cos(15t) + \frac{1}{2}\cos(25t)\right)\right)\mathcal{U}(t)$$

La courbe de f est :



1. Calculer le produit de convolution entre f et $g(t) = \mathcal{U}(t)$
2. Tracer (à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice) la courbe de $f \star g$ et en déduire l'intérêt du produit de convolution.

Exercice 4 ***Convolution et dérivation***

Calculer la dérivée du produit de convolution de $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ par $g(t) = (e^{2t} - 1)\mathcal{U}(t)$.

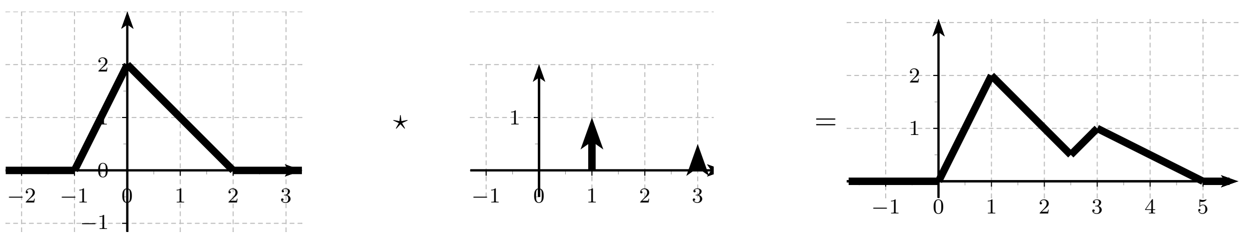
Exercice 5 ***Convolution par un Dirac***

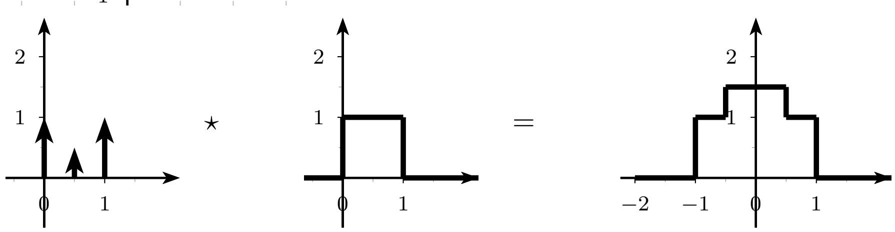
Tracer le produit de convolution de x par h pour chacun des couples suivants :

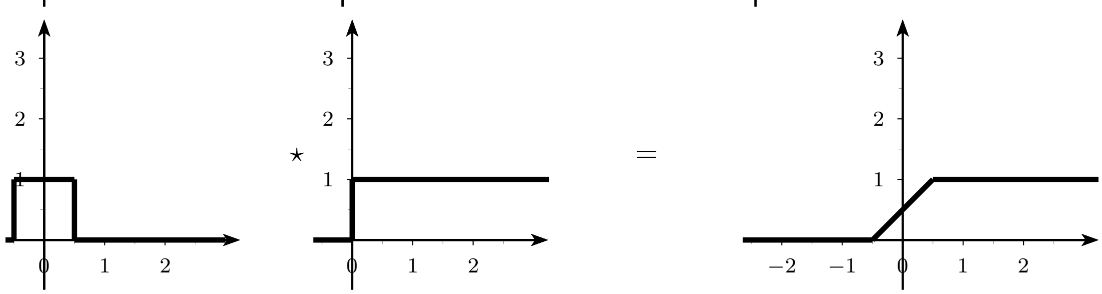
1. $x(t) = e^{-|t|}$ et $h(t) = \delta(t-3)$
2. $x(t) = \begin{cases} 1 + t \text{ si } t \in [-1; 0] \\ 1 - t \text{ si } t \in [0; 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $h(t) = 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$

Exercice 6 ***Convolution par un Dirac ou un échelon***

Dire si les produits de convolution suivant sont vrais ou faux en justifiant :

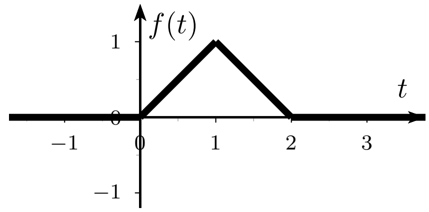
1. 

2. 

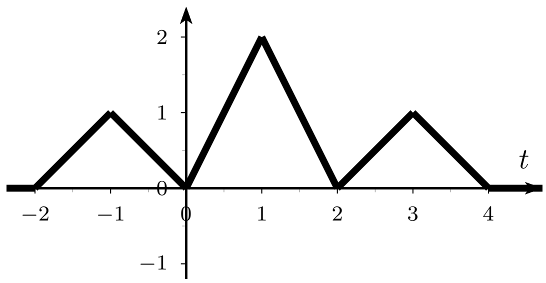
3. 

Exercice 7 ***Convolution par un Dirac***

Soit f la fonction définie par le graphe suivant :

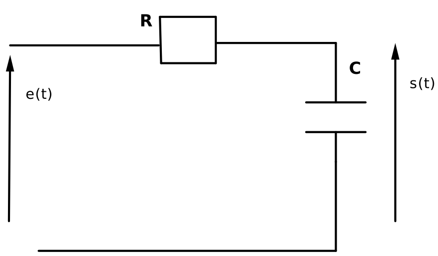


Déterminer le signal g telle que le graphe de $f * g$ soit le suivant :



Exercice 8 ***Filtre RC***

Soit le circuit électrique :



Avec C non chargé initialement.

1. En mode maths :
   (a) Montrer que le signal $s(t)$ vérifie l'équation différentielle :
   $$(E) \qquad RC\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$
   (b) Résoudre (E) à l'aide de la transformée de Laplace pour $e(t) = \delta(t)$ (on pose $s(0) = 0$). On note $h(t)$ cette solution, c'est la réponse impulsionnelle du filtre.
   (c) Calculer $h \star \mathcal{U}$ puis la tracer pour $C = 2\mu F$, $R = 470K\Omega$. Que représente cette fonction ?
2. *Question subsidiaire* En mode génie électrique :
   (a) Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega)$ avec les outils "*G.E.*".
   (b) En déduire la représentation complexe du signal de sortie $\underline{V}_S$ pour un signal d'entrée $e(t) = \mathcal{U}(t)$.
   (c) Déterminer alors l'écriture temporelle du signal de sortie : $s(t)$.

Exercice 9 ***Convolution et tranformée de Laplace***

Soit la fonction $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$ dans le domaine de Laplace.

1. Rappeler la transformée inverse des fonctions $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{p+1}$.
2. En utilisant le produit de convolution, calculer la transformée inverse de F.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la décomposition en éléments simples.

Exercice 10 ***Convolution et tranformée de Laplace***

En utilisant le produit de convolution retrouver l'original en Laplace des fonctions suivantes

1. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.
2. $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+1)}$.
3. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+1)}$.

Compléments

Exercice 11

Déterminer graphiquement le produit de convolution du couple de signaux suivants :

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-1;3] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$g(t) = \begin{cases} 1+t \text{ si } t \in [0;2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 12

1. Calculer le produit de convolution de $f(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$ par $g(t) = t\mathcal{U}(t)$
2. Soient les fonctions $f(t) = \Pi(t-1)$ et $g(t) = \Pi(t)$. Calculer $f * g(-1)$ et $f * g(1)$.

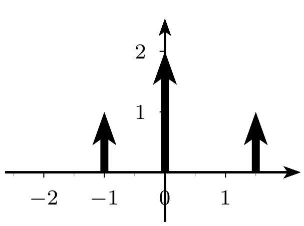
Exercice 13

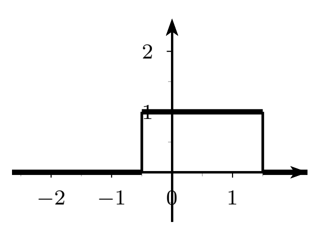
Calculer $f \star g$:

1. $f(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$ et $g(t) = \Lambda(t+1)$
2. $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t-1)$ et $g(t) = \mathcal{U}(t+1)$

Exercice 14

1. Dans chacun des cas, déterminer le produit de convolution $f \star g$.
   (a) $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (2t-3)\mathcal{U}(t)$.
   (b) $f(t) = \delta(t) + e^{2t}\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t)$.
2. Soient f et g les signaux définies par leur représentation graphique :





Tracer, sans justifier, la courbe de $f \star g$.

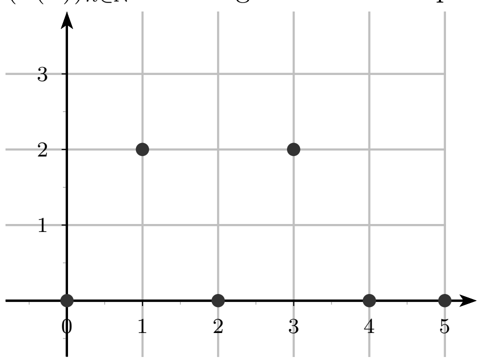
Chapitre 5

Transformée en $\mathcal{Z}$

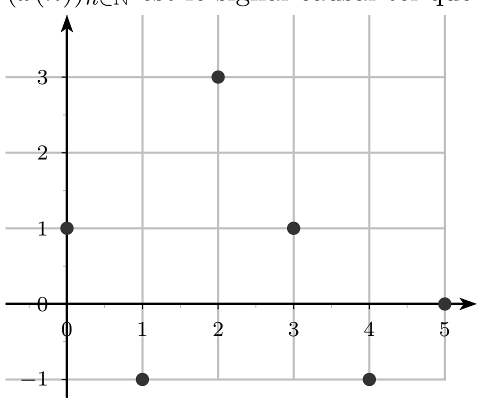
Exercice 1 ***Calcul de T.Z***

Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de chaque signal :

1. $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est le signal causal tel que $\forall n \geq 4,\ x(n) = 0$ et dont le graphe est :



2. $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est le signal causal tel que $\forall n \geq 5,\ x(n) = 0$ et dont le graphe est :



Exercice 2 ***Calcul de T.Z***

Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de chaque signal (on commencera par tracer l'allure du signal).

1. $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$
2. $x(n) = 2^n \mathcal{U}(n)$
3. $x(n) = (-1)^n \mathcal{U}(n)$
4. $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Exercice 3 ***Calcul de T.Z***

Déterminer, en justifiant, les transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants.

1. $x(n) = n\mathcal{U}(n)$
2. $x(n) = 5^n\mathcal{U}(n)$
3. $x(n) = 2\mathcal{U}(n) - n\mathcal{U}(n)$
4. $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\mathcal{U}(n)$
5. $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\mathcal{U}(n)$
6. $x(n) = \cos\left(100\pi n + \frac{\pi}{3}\right)\mathcal{U}(n)$
7. $x(n) = n^2\mathcal{U}(n)$

Exercice 4 ***Calcul de T.Z***

Déterminer, en justifiant, les transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants.

1. $x(n) = (2n+1)\mathcal{U}(n)$
2. $y(n) = x(n-3)$
3. $z(n) = x(n+2)\mathcal{U}(n)$
4. $w(n) = 2^n x(n)$

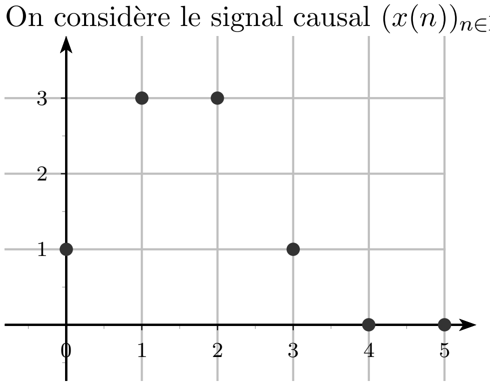
Exercice 5 ***Calcul de T.Z***

Déterminer, en justifiant, les transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants.

1. $x(n) = n\mathcal{U}(n-2)$
2. $x(n) = (n-1)^2\mathcal{U}(n-1)$
3. $x(n) = 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\mathcal{U}(n)$
4. $x(n) = 2^{-n}\mathcal{U}(n-3)$
5. $x(n) = e^{-n}\mathcal{U}(n-1) + 2(n+1)\mathcal{U}(n)$
6. $x(n) = \mathcal{U}(n)\mathcal{U}(1-n)$
7. $x(n) = n^2\mathcal{U}(n-1)$
8. $x(n) = n(-1)^n\mathcal{U}(n)$
9. $x(n) = n^2 2^n\mathcal{U}(n)$

Exercice 6 ***Calcul de T.Z***

On considère le signal causal $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ suivant, où $\forall n \geq 4,\ x(n) = 0$:



1. Calculer sa transformée en $\mathcal{Z}$, puis donner son domaine de convergence.
2. Donner la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y défini pour tout n par $y_1(n) = nx(n)$.
3. Donner la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y défini pour tout n par $y_2(n) = x(n-2)$.
4. Donner la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y défini pour tout n par $y_3(n) = x(n+2)\mathcal{U}(n)$.

Exercice 7 ***Calcul de T.Z inverse***

Déterminer quel signal causal a comme transformée en $\mathcal{Z}$:

1. $X(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} + 5z^{-4}$
2. $X(z) = \dfrac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$
3. $X(z) = \dfrac{1}{z^2}$
4. $X(z) = \dfrac{4}{1 - z^{-1}}$
5. $X(z) = \dfrac{2z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}$
6. $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{(z^{-1} - 2)(z^{-1} - 3)}$
7. $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{(z^{-1} - 3)^2}$
8. $X(z) = \dfrac{z}{z^2 + 4}$
9. $X(z) = \dfrac{1}{(1 - z^{-1})(1 - 3z^{-1})}$

Exercice 8 ***Équation récurrente d'ordre 1***

On considère le système discret $\mathcal{S}$ dont la sortie $(y(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donnée par :

$$y(n) = \frac{9y(n-1) + x(n-1)}{10},$$

où $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est le signal d'entrée, supposé causal.
Par définition le signal $(y(n))$ est aussi considéré comme causal.

1. Calculer la transmittance complexe* du système.
2. Calculer la réponse impulsionnelle puis vérifier la cohérence des valeurs de $y(1)$ et $y(2)$ obtenues, d'une part avec l'expression du filtre et d'autre part avec l'expression de la réponse impulsionnelle.
3. Calculer la réponse sa réponse indicielle puis vérifier la cohérence des valeurs de $y(0)$, $y(1)$ et $y(2)$ obtenues, d'une part avec l'expression du filtre et d'autre part avec l'expression de la réponse indicielle.

$\star$transmittance complexe $= \frac{Y(z)}{X(z)}$

Exercice 9 ***Équation récurrente d'ordre 2***

1. Soit x le signal causal discret vérifiant pour tout $n \geq 0$:

$$x(n) + x(n-1) - 6x(n-2) = \delta(n)$$

   (a) Calculer les 5 premières valeurs de $x(n)$.
   (b) On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de x. Calculer $X(z)$
   (c) En déduire l'expression de $x(n)$ en fonction de n.

2. Soit x le signal causal discret vérifiant pour tout $n \geq 0$:

$$x(n) + x(n-1) - 6x(n-2) = U(n)$$

   (a) Calculer les 5 premières valeurs de $x(n)$.
   (b) On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de x. Calculer $X(z)$
   (c) En déduire l'expression de $x(n)$ en fonction de n.

Compléments

Exercice 10

Déterminer le domaine de convergence de la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = 2^n$ puis calculer la transformée en fonction de z.

Exercice 11

Exprimer la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal périodique $f(t)$ de période T, échantillonnée selon la période $T_e = \frac{T}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de la transformée en $\mathcal{Z}$ du "motif" $f_0(t)$ tel que

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{sur } [0, T] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Exercice 12

La transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale d'une séquence $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la somme de la série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a(n)z^{-n}$, sous réserve que cette série converge.

Déterminer si les séquences suivantes ont une transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale, et la calculer sur leur domaine de convergence si c'est le cas.

1. $a(n) = 1,\ n \in \mathbb{Z}$,
2. $a(n) = 1$ si $n \in \mathbb{Z}^-; (1/2)^{-n}$ sinon.
3. $a(n) = n;\ n \in [-5, \infty[\cap \mathbb{Z}$.

Exercice 13

1. Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :
   (a) $x_1(n) = (-1)^n \mathcal{U}(n)$
   (b) $x_2(n) = n(-1)^n \mathcal{U}(n)$
   (c) $x_3(n) = (-2)^n \mathcal{U}(n-2)$
   (d) $x_4(n) = n(n-1)\mathcal{U}(n-1)$
2. Calculer la transformée inverse de
   (a) $X_2(z) = \dfrac{z^{-3}}{(1-z^{-1})^2}$
   (b) $X_3(z) = 1 + 2z^{-2} + z^{-3}$

Exercice 14

Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

1. $x_1(n) = 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n-2)$
2. $x_2(n) = n(-2)^n \mathcal{U}(n)$

Exercice 15 Calculer la transformée inverse de

1. $X_1(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-3)}$
2. $X_2(z) = \dfrac{z^{-3}}{1+z^{-1}}$
3. $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4}$

Chapitre 6

Transformée de Fourier

Exercice 1

1. Soit la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Tracer son graphe et calculer sa transformée de Fourier.

2. Soit la fonction Λ “triangle” définie par

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Tracer le graphe de Λ. Calculer (directement) sa transformée de Fourier.

   (b) Retrouver ce résultat en utilisant la fonction dérivée.

Exercice 2

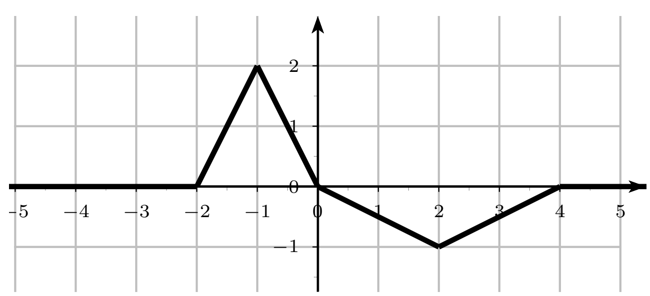
Représenter les signaux suivants et donner leurs transformées de Fourier :

1. $f(t) = \Pi(t-3)$
2. $g(t) = \Lambda\left(\dfrac{t}{3}\right)$
3. $h(t) = \Pi\left(\dfrac{t-1}{2}\right)$
4. $k(t) = \Lambda\left(\dfrac{3t-1}{4}\right)$
5. $l(t) = \dfrac{\Pi(1-t)}{2}$

Exercice 3

Calculer les transformées de Fourier, si elles existent, des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = \dfrac{1}{2}e^{-|t|}$,
2. $f_2(t) = \mathcal{U}(t)$,
3. $f_3(t) = (\mathcal{U}(t+\frac{\pi}{2}) - \mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2}))\cos t$,
4. la fonction f dont le graphe est



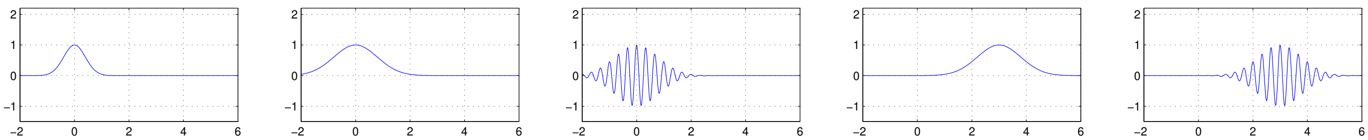
Exercice 4

On considère la fonction paire f définie par : $\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } t \in [0,1[\\ f(t) = 2-t \text{ si } 1 \leq t \leq 2 \\ f(t) = 0 \text{ si } t \geq 2 \end{cases}$

1. Représenter la fonction f
2. Calculer sa transformée de Fourier :
   (a) directement (par la définition),
   (b) en écrivant f comme somme de triangle,
   (c) en utilisant f',
   (d) à l'aide d'un produit de convolution.

Exercice 5

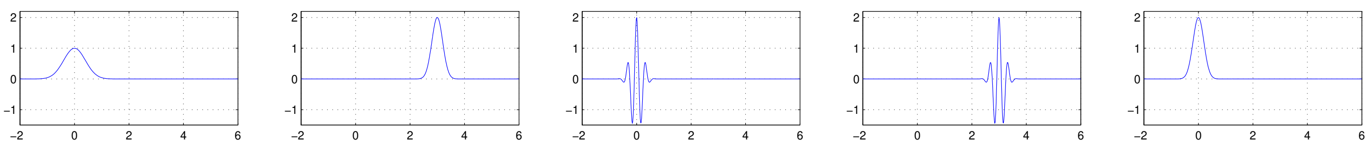
La figure suivante représente cinq signaux temporels réels à temps continu s_0 à s_4. Les signaux s_1 à s_4 ont été obtenus par des transformations simples du signal s_0 : modulation, décalage, dilatation.



s_0 $\quad$ s_1 $\quad$ s_2 $\quad$ s_3 $\quad$ s_4

Identifier ces transformations, autrement dit expliquer comment chacun des signaux s_1 à s_4 a été obtenu à partir de s_0.

La figure suivante représente la partie réelle de leur transformée de Fourier (S_a à S_e), *dans le désordre*...On sait cependant que S_a est la transformée de s_0.



S_a $\quad$ S_b $\quad$ S_c $\quad$ S_d $\quad$ S_e

Reformer, en justifiant votre réponse, les couples (s_i, S_j), autrement dit retrouvez la transformée de Fourier des signaux s_1, s_2, s_3, s_4 dans l'ensemble S_b, S_c, S_d, S_e.

Exercice 6 ***Transformée de Fourier inverse***

1. Calculer la transformée de Fourier inverse de :

$$F_1(s) = \begin{cases} 1 \text{ si } s \in [-2, 2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi$ en utilisant la transformée de Fourier inverse.

Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$.
2. Montrer en appliquant l'identité de Parseval que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 8

A l'aide de l'identité de Parseval, calculez les intégrales :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$,
2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Exercice 9

On se donne deux fonctions $f_a(x) = e^{-a|x|^2}$ et $f_b(x) = e^{-b|x|^2}$ (ces fonctions sont appelées des gaussiennes), où a et b sont des réels strictement positifs.

1. Déterminer les transformées de Fourier de f_a et de f_b.

2. Déterminer la transformée de Fourier de $f_a * f_b$.

Exercice 10

Utiliser la transformée de Fourier pour calculer :

1. $\delta \star \delta$
2. $\delta_a \star \delta_b$
3. $\delta \star f$
4. $\delta_a \star f$

Compléments

Exercice 11

Soit le signal 2π périodique s défini sur $[-1;1]$ par : $s(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [-0,5;0,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Soit σ le signal défini sur $\mathbb{R}$ par : $\sigma(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [-0,5;0,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Déterminer les coefficients complexes de la série de Fourier de s.
2. Calculer numériquement les valeurs des c_n jusque $n = 8$ et tracer le spectre des c_n.
3. Déterminer $S(v)$ la transformée de Fourier de σ.
4. Représenter $S(v)$ pour $v \in [0;4]$ et montrer qu'en échantillonnant $S(v)$ à une fréquence que l'on précisera on retrouve le spectre des c_n.

Exercice 12

Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Vérifier que la transformée de Fourier de cette fonction existe.

Montrer que cette transformée est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 4\pi^2 xy = 0.$$

En déduire que $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2\omega^2}$.

Exercice 13

Soit $s(t)$ le signal : $s(t) = \cos(5\pi t)$.

1. Quelle est la transformée de Fourier de s.
2. On multiplie s par la fonction porte Π.
   (a) Représenter le signal $g(t) = s(t)\Pi(t)$.
   (b) Calculer la transformée de Fourier de g.

Exercice 14

Soient f et g les signaux :

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1} \text{ et } g(t) = \frac{1}{t^2+4}$$

Le but de l'exercice est de calculer le produit de convolution $f \star g$.

1. Déterminer la transformée de Fourier de f et de g.
2. Calculer $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
3. En déduire $f * g$.

Exercice 15

Déterminer la fonction $f \in L^2$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-x^2}$.

Exercice 16

On considère la fonction

$$f(t)=\begin{cases}\pi t+1 & \text{pour } -\frac{1}{\pi}\leq t\leq 0\\ -\pi t+1 & \text{pour } 0\leq t\leq \frac{1}{\pi}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-5,5]$.
2. Déterminer la transformée de Fourier de f
3. Déterminer la transformée de Fourier de $g(t)=\begin{cases}\pi & \text{pour } -\frac{1}{\pi}\leq t\leq 0\\ -\pi & \text{pour } 0\leq t\leq \frac{1}{\pi}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
4. (a) Que vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2dt$?

   (b) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^4 dt$.

Chapitre 7

Equations différentielles

Exercice 1 ***Rappels***
Résoudre les équations suivantes :

1. $2y'(t) + 3y(t) = 0$
2. $5y'(t) + y(t) = 0$ avec $y(0) = 2$
3. $y'(t) + 6y(t) = t$
4. $-y'(t) - 4y(t) = t$ avec $y(0) = 1$

Exercice 2 La fonction $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ est-elle solution de l'équation différentielle (E_1) ?

$$(1 + x)y'(x) + y(x) = 1 \qquad (E_1)$$

Exercice 3 ***Équations homogènes d'ordre 2***
Résoudre les équations suivantes :

1. $3y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$
2. $y''(t) = 0$
3. $y''(t) - y'(t) = 0$

Exercice 4
Les questions sont toutes indépendantes.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont $y(t) = e^{-\frac{3}{4}t}$ est solution.
2. Déterminer une équation différentielle dont $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = e^{2t}$ sont solutions.
3. Déterminer une équation différentielle dont $y_1(t) = \cos(3t)$ et $y_2(t) = \sin(3t)$ sont solutions.
4. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont $y(t) = te^{-3t}$ est solution.

Exercice 5 ***Conditions initiales***

1. Résoudre l'équation suivante
$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = -1 \end{cases}$$
2. L'équation suivante admet-elle une unique solution ?
$$\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = 0, \\ y(0) = 0, \ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Exercice 6
Soit τ un nombre réel et soit (E) l'équation différentielle : $(\tau - 1)y''(t) - \tau y'(t) + y(t) = 0$.
Discuter selon les valeurs de τ la forme des solutions de (E).

Exercice 7 ***Équations d'ordre 2 non homogènes***

Pour chacune des équations différentielles suivantes :
• Résoudre l'équation homogène associée,
• déterminer une solution particulière,
• déterminer l'ensemble des solutions.

1. $2y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 2t^2 + 1$
2. $2y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = \sin(2t)$
3. $y''(t) + y(t) = \mathrm{e}^{3t}$

Exercice 8 ***Solution particulière : cas particulier***

Soit l'équation différentielle $(E_2)\quad y''(t) - y'(t) - 6y(t) = e^{-2t}$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-2t}$ est solution de l'équation homogéne associée à (E_2).
2. Déterminer une solution particulière de (E_2) sous la forme $y(t) = P(t)e^{-2t}$ avec P de degré 1.
3. Résoudre (E_2).
4. Existe-t-il une solution de (E_2) qui ait pour limite 0 en $+\infty$?

Exercice 9 ***E.D*** & ***Transformée de Laplace***

L'étude du mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

1. **Détermination de $F(p)$, la transformée de Laplace de f :**
   (a) Calculer en fonction de $F(p)$: $\mathcal{L}_{f'(t)}(p)\quad,\quad \mathcal{L}_{f''(t)}(p)\quad$ puis $\quad\mathcal{L}_{f''(t)+2f'(t)+2f(t)}(p)$
   (b) Calculer la transformée de Laplace de $e^{-t}\mathcal{U}(t)$.
   (c) En déduire dans (7.1) l'expression de $F(p)$ en fonction de p.
2. **Détermination de f :**
   (a) Vérifier que $F(p) = \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{(p+1)^2+1}$. En déduire l'expression de f.

Exercice 10

1. Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

   pour $x \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = -7$.
2. Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}\mathcal{U}(t)$$

   pour $x \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = A$ et $y'(0) = B$.

Compléments

Exercice 11

On considère l'équation différentielle suivante

$$(\star\star)\begin{cases} y''+2y'+y=t\mathcal{U}(t) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

On cherche une solution causale à l'équation $(\star\star)$

1. Exprimer $\mathcal{L}_{y''}(p)$ et $\mathcal{L}_{y'}(p)$ en fonction $\mathcal{L}_y(p)$, $y(0)$ et $y'(0)$
2. Montrer que
$$\frac{1}{p^2(p^2+2p+1)}=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{2}{p}$$
3. Déterminer la transformée de Laplace inverse de $\dfrac{1}{p^2(p^2+2p+1)}$.
4. En déduire la valeur de $f*g(t)$ avec $f(t)=t\mathcal{U}(t)$ et $g(t)=te^{-t}\mathcal{U}(t)$. Ce résultat est-il cohérent avec la question 3 de l'exercice 2 ?
5. Résoudre $(\star\star)$ en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 12

1. On considère l'équation différentielle linéaire :
$$y''(t)-y'(t)-2y(t)=0. \tag{H}$$
   (a) Donner la forme générale des solutions de (H).
   (b) Donner la solution de (H) qui vérifie $y(0)=1$ et $y'(0)=1$.
   (c) Donner la solution de (H) qui vérifie $y(0)=1$ et $y(1)=1$.
2. On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :
$$y''(t)-y'(t)-2y(t)=2t^2. \tag{E_1}$$
   (a) Déterminer une solution particulière de (E_1).
   (b) Déterminer la forme générale des solutions de (E_1).
   (c) Déterminer la solution de (E_1) qui vérifie $y(0)=1$ et $y'(0)=1$.
3. On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :
$$y''(t)-y'(t)-2y(t)=2e^{2t}. \tag{E_2}$$
   (a) Déterminer une solution particulière de (E_2).

Exercice 13

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E)\quad y''+2y'-3y=e^{-3t}$$

$$(H)\quad y''+2y'-3y=0$$

1. Montrer que les fonctions $f(t)=e^t$ et $g(t)=e^{-3t}$ sont solutions de (H).
2. Donner toutes les solutions de (H).
3. La fonction g est-elle solution de (E) ?
4. Chercher une solution de (E) de la forme $y_p(t)=kte^{-3t}$.
5. Donner toutes les solutions de (E).
6. Donner la solution de (E) qui vérifie : $y(0)=1$ et $y'(0)=1$

Exercice 14 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x^2 + 1)e^x$$

On pourra pour cela utiliser le théorème suivant :

Théorème 1 (Recherche d'une solution particulière, forme exponentielle-polynôme)
On considère l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = g \tag{E}$$

où $g(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x)$.

Pour chaque $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *il existe une solution particulière* y_k *de* $y'' + ay' + by = e^{m_k x} P_k(x)$ *de la forme* $y_k = e^{m_k x} Q_k(x)$ *avec* Q_k *un polynôme de degré :*

— $\deg(P_k)$ *si* m_k *n'est pas solution de l'équation caractéristique*

— $\deg(P_k) + 1$ *si* m_k *est solution simple de l'équation caractéristique*

— $\deg(P_k) + 2$ *si* m_k *est solution double de l'équation caractéristique*

Une solution particulière de (E) *est alors* $\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Chapitre 8

Développements limités

Exercice 1

Déterminer les limites quand $x \to a$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+2}$ avec $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$ avec $a = 1$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$ avec $a = -\infty$
4. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ avec $a = +\infty$
5. $f(x) = (x^3-x)\ln(x^4-1)$ avec $a = 1$
6. $f(x) = \dfrac{e^{x^3}}{x^3+x}$ avec $a = +\infty$
7. $f(x) = \dfrac{e^{x^3-x^2}}{e^{x^3+x}}$ avec $a = +\infty$
8. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$ avec $a = 0$
9. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ avec $a = 0$
10. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ avec $a = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2 ***Extrait de DS***

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. $\dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x+2}$
2. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
3. $e^{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^2}$
4. $x^2+x+1 \underset{0}{\sim} x^3+x$
5. $\sin(x)-1 \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} x-\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3

Calculer les développements limités suivants, au voisinage de 0 :

1. $f(x) = x^4-x^2+x$ à l'ordre 3
2. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ à l'ordre 4
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 3
4. $f(x) = \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3
5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x-1}$ à l'ordre 3

Exercice 4

Calculer les développements limités au voisinage de 0 suivants :

1. $f(x) = \ln(1 + x - x^2)$ à l'ordre 2
2. $f(x) = e^{\sin(x)}$ à l'ordre 3
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4
4. $f(x) = \ln(\cos x)$ à l'ordre 4
5. $f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$ à l'ordre 2
6. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}$ à l'ordre 2
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4

Exercice 5

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = e$,
2. $\exp(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 1$,
3. $e^x - \sqrt[3]{1 + x}$ à l'ordre 2 au voisinage de $x_0 = 2$
4. $\tan(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$,
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$,

Exercice 7

Calculer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\ln(1 + x)}$,
2. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$,

Exercice 8 On note $f(x) = e^x \ln(1 + x)$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f'(x)$.
3. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{e^x}{1 + x}$.
4. (a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point 0.
   (b) Quelle est la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au point 0.

Exercice 9

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\dfrac{1}{1 + x^2}$.
2. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\arctan(x)$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3} . \ln(1 + \arctan(x))$.

Exercice 10

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.

Compléments

Exercice 11 ***Extrait de DS 2018***

1. Montrer que le DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{\cos(x)}$ est $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$
2. Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente en 0 de $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$

   (b) La courbe de $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$ se situe-t-elle au dessus ou au dessous de sa tangente en 0 ?

Exercice 12 ***Extrait de DS 2018***

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$
2. Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{1+x}$

Exercice 13 ***Extrait de DS 2016***

Les questions suivantes sont indépendantes

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x+2x^2}$.
2. Montrer que les fonctions $f(x) = \ln(1+3x)\sin(2x)$ et $g(x) = 6x$ sont équivalentes en 0.
3. Soit f une fonciton dont le développement limité à l'ordre 4 est $1 + 3x - 5x^3 + 7x^4 + x^4\epsilon(x)$.
   Quelle est la position relative entre la courbe de f est sa tangente en 0 ?

Exercice 14

Les assertions suivantes sont fausses. Pour chacune d'entre elles, trouvez un contre-exemple pour le prouver.

1. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $e^f \underset{a}{\sim} e^g$.
3. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 1$ alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.
4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et f et g sont dérivables alors $f' \underset{a}{\sim} g'$.

Exercice 15 ***Sujet concours ENSEA 2009***

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{\ln(\cos(x))}$.

Dans les développpement limités (d.l.) qui suivent, ε désigne une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

Répondre par vrai ou faux :

1. Le domaine de définition de f est $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$
2. Au voisinage de 0, $\sin(x)$ a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) : $\sin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\varepsilon(x)$.
3. Au voisinage de 0, $\sin^2(x)$ a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) : $\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + x^6\varepsilon(x)$.
4. Au voisinage de 0, $\ln(1+x)$ a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) : $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + x^6\varepsilon(x)$.
5. Au voisinage de 0, $\ln(\cos(x))$ a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) : $\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + x^6\varepsilon(x)$.
6. Au voisinage de 0, $\frac{x^2}{\ln(\cos(x))}$ a pour d.l.4 : $\frac{x^2}{\ln(\cos(x))} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{60} + x^4\varepsilon(x)$.
7. Au voisinage de 0, $\frac{\sin^2(x)}{\ln(\cos(x))}$ a pour d.l.4 : $\frac{\sin^2(x)}{\ln(\cos(x))} = -2 + x^2 - \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)$.
8. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = -2$
9. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f'(x) = 1$
10. Au voisinage de 0^+, la courbe représentative de f reste au dessus de la parabole d'équation $y = -2 + x^2$.

Exercice 16 $\star\star$

Etudier les branches infinies de la courbe représentée par :

$$y = x^3 \arctan\left(\frac{3x-1}{3(x^2+x+1)}\right).$$

On déterminera une parabole (P) asymptote à la courbe et la position de la courbe par rapport à cette parabole.

Chapitre 9

DS de l'année 2022-2023

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 07 octobre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 1 : Suites et séries numériques***

1. Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre. Préciser la raison quand elle existe.

   (a) $U_n = \frac{2^{n+2}}{5^{2n}}$
   (b) $U_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+4}$
   (c) $U_{n+1} = 2U_n + 5$
   (d) $U_n = 4n + 3$
   (e) $U_{n+1} = 3U_n$
   (f) $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$

2. Déterminer la limite des suites suivantes.

   (a) $U_n = \frac{2^{n+2}}{5^{2n}}$
   (b) $U_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+4}$
   (c) $U_n = 4n + 3$
   (d) $U_{n+1} = 3U_n$ avec $U_0 = 2$

Exercice 2 ***Chapitre 1 : Suites et séries numériques***

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} 2k + 1$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3^n}$.

   (a) Exprimer S_N en fonction de N.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$.

3. Déterminer la nature des séries suivantes :

   (a) $\sum \frac{4}{5^{2n}}$
   (b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
   (c) $\sum \frac{4^{n-3}+2}{2^n+4}$
   (d) $\sum n^2 \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$

Exercice 3 ***Chapitre 2 : Révisions sur le calcul intégral***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^2 3t^4 + 5t^3 + t + 2dt$
2. $I_2 = \int_0^\pi \cos(3t)\sin^2(3t)dt$
3. $I_3 = \int_{-1}^0 \frac{2}{(t-3)(t-1)}dt$
4. $I_4 = \int_{-2}^2 \sin(3t) + 3tdt$
5. $I_5 = \int_0^1 (2t+3)e^{4t}dt$
6. $I_6 = \int_{-1}^1 \frac{2}{t^2+4}dt$

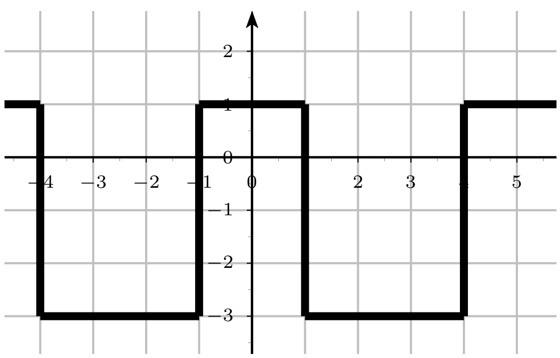
Exercice 4 ***Chapitre 3 : Séries de Fourier***

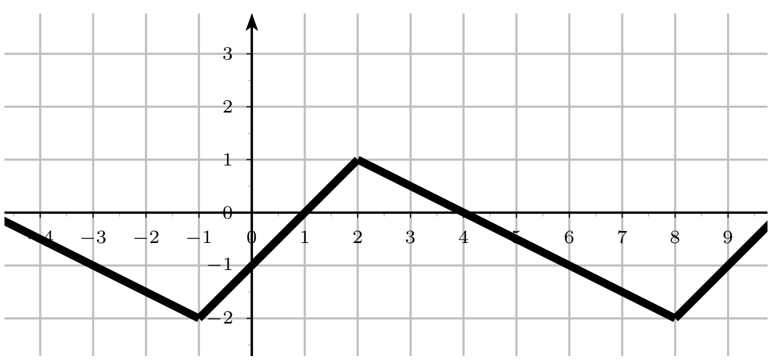
1. Mettre sous la forme $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$ les signaux suivants :
   (a) $s_1(t) = -\sin(10t)$
   (b) $s_2(t) = -2\cos(20t) + 2\sqrt{3}\sin(20t)$
   (c) $s_3(t) = 2\cos(-40t)$
2. Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) du signal suivant :

$$s(t) = 3 - \sin(10t) - 2\cos(20t) + 2\sqrt{3}\sin(20t) + 3\sin(30t) + 2\cos(40t).$$

Exercice 5 ***Chapitre 3 : Séries de Fourier***

Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer la valeur moyenne.

1. 

2. 

3. $f(t) = \cos(\pi t)$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 25 novembre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 3 : Séries de Fourier***

1. On considère le signal s suivant :

$$s(t) = 3 - \sin(10t) - 2\cos(20t) + 2\sqrt{3}\sin(20t) + 3\sin(30t) + 2\cos(40t).$$

   (a) Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) du signal s.

   (b) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction s.

2. On considère la fonction f dont les coefficients de Fourier sont donnés par : $\begin{cases} a_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n} \text{ et } a_n = \frac{(-1)^n}{n} \end{cases}$

   (a) Déterminer la série de Fourier de f

   (b) Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) des 4 premières harmoniques de la série de Fourier.

   (c) Déterminer l'energie moyenne de f.

3. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g \text{ est 1-périodique,} \\ g(t) = t,\ \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\end{cases}$

Exercice 2 ***Chapitre 4 : Produit de convolution***

1. Calculer le produit de convolution entre f et g :

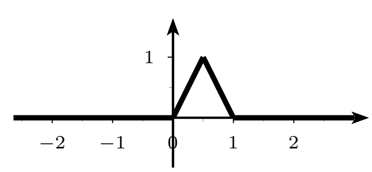
   (a) $f(t) = 4t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (t-5)\mathcal{U}(t)$

   (b) $f(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = \Pi(t)$

2. Soit $h(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3}(3t+1)\delta(t-k)$

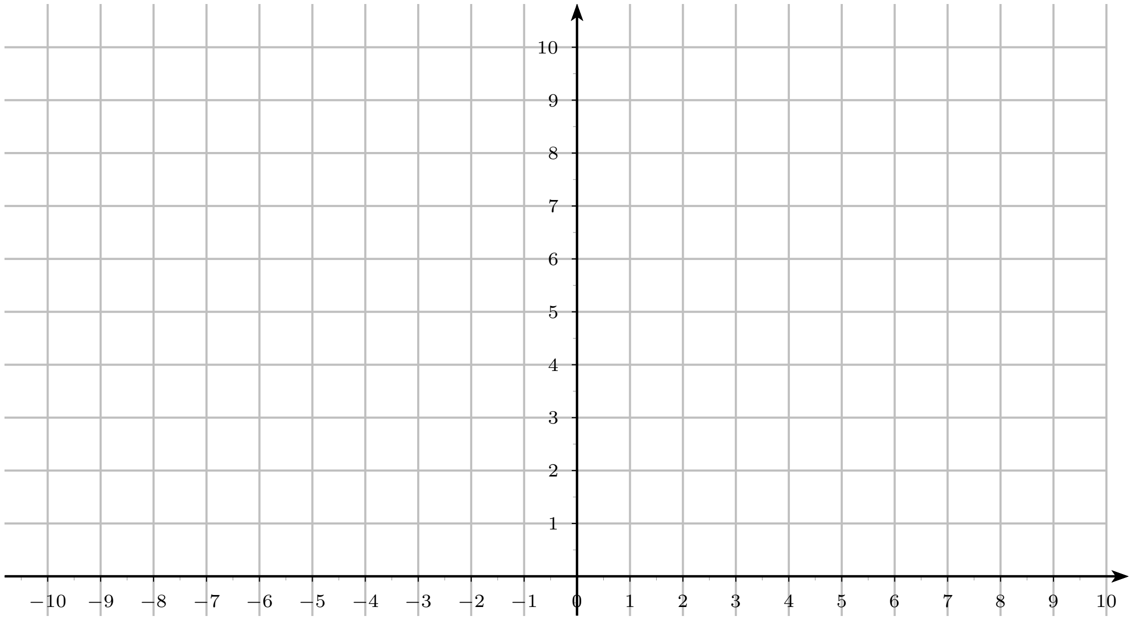
   (a) Représenter h sur le graphique de la page suivante.

   (b) Tracer, sur le même graphique, le produit de convolution de h par k (sans justifier) en sachant que la courbe de k est :



   (c) En utilisant le produit de convolution (et en vous aidant du formulaire de la page suivante), calculer la transformée de Laplace inverse de F définie par :

$$F(p) = \frac{6}{p(p^2+9)}$$



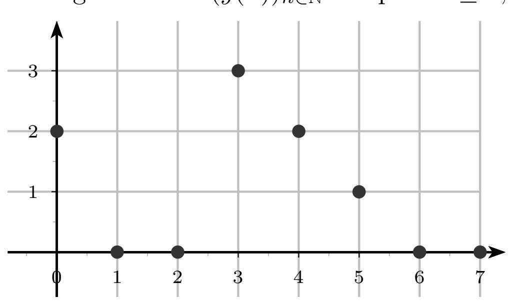
Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$

Fonction	Transformée de Laplace
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Exercice 3 ***Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$***

1. Donner la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal numérique causal x.
2. Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = \mathcal{U}(n)$.
3. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \geq 6, y(n) = 0$ et dont le graphe est :



4. Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 13 janvier 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 7 : Equations différentielles***

1. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = e^{-t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(b) $y''(t) + 10y'(t) + 25y(t) = t + 5$

(c) $\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4 \end{cases}$

2. Déterminer une équation différentielle dont $y_1(t) = e^t \cos(2t)$ et $y_2(t) = e^t \sin(2t)$ sont solutions.
3. La fonction $f(t) = (2t + 1)e^{-4t}$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante :

$$2y''(t) + y(t) - 4y(t) = 32te^{-4t}$$

Exercice 2 ***Chapitre 6 : Transformée de Fourier***

1. Montrer, en utilisant la définition de la transformée de Fourier, que :

$$\mathcal{F}_\Pi(s) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} & \text{si } \ s \neq 0 \\ 1 & \text{si } \ s = 0 \end{cases}$$

oú $\mathcal{F}_\Pi$ est la transformée de Fourier du signal porte Π.

2. Donner la transformée de Fourier des signaux suivants :

(a) $f_1(t) = \Lambda(t - 2)$

(b) $f_2(t) = \Pi(3t)$

(c) $f_3(t) = \Pi\left(\frac{2t+1}{4}\right)$

Exercice 3 ***Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$***

1. Déterminer, en justifiant, les transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants :

(a) $x_1(n) = (2n + 4)\mathcal{U}(n)$

(b) $x_2(n) = \frac{1}{4^n}\mathcal{U}(n)$

(c) $x_3(n) = x_1(n - 2)$

(d) $x_4(n) = n^2\mathcal{U}(n)$

(e) $x_5(n) = 2^n(n - 2)\mathcal{U}(n - 2)$

2. Déterminer quel signal causal a comme transformée en $\mathcal{Z}$:

(a)

$$X_1(z) = 4 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3}$$

(b)

$$X_2(z) = \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

Exercice 4 ***Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$***

Soit x le signal causal discret vérifiant pour tout $n \geq 0$:

$$x(n) - 3x(n-1) + 2x(n-2) = \delta(n-1)$$

1. En appliquant la transformée en $\mathcal{Z}$ à la relation précédente, montrer que :

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

2. En déduire que :

$$x(n) = (2^n - 1)\mathcal{U}(n)$$

Exercice 5 ***Chapitre 6 : Transformée de Fourier***

1. Calculer à l'aide de l'identité de Parseval l'intégrale I_1 :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} dx$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale I_2 :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

Chapitre 10

DS de l'année 2021-2022

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 1 octobre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 2 : Révisions sur le calcul intégral***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt$
2. $J = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x)\cos(3t)dx$
3. $K = \displaystyle\int_{1}^{e} x^3 \ln(x) dx$
4. $L = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2t^2+3t}{2t+1} dt$
5. $M = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

Exercice 2 ***Chapitre 2 : Révisions sur le calcul intégral***

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\ln(3)}^{3\ln(2)} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

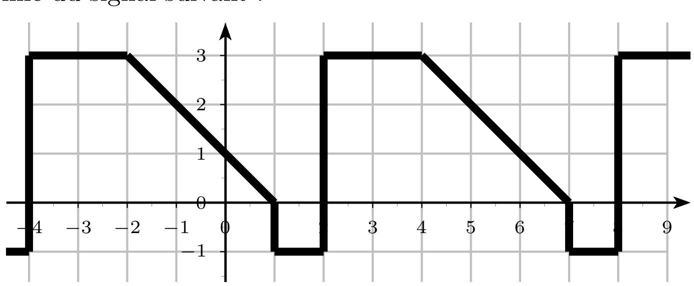
On souhaite calculer I en posant le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$.

1. Exprimer x en fonction de u.
2. Quelles seront les bornes de l'intégrale I écrite en fonction de u ?
3. Quelle est la relation entre dx et du ?
4. Calculer I.

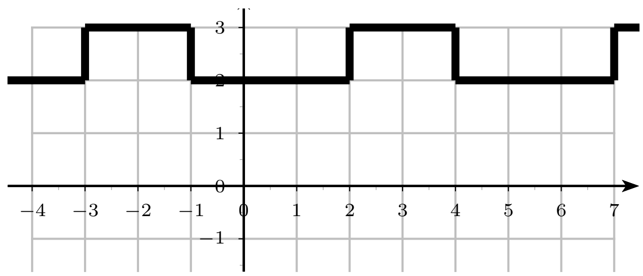
Exercice 3 ***Chapitres 3 : Séries de Fourier***

Les questions suivantes sont indépendantes.

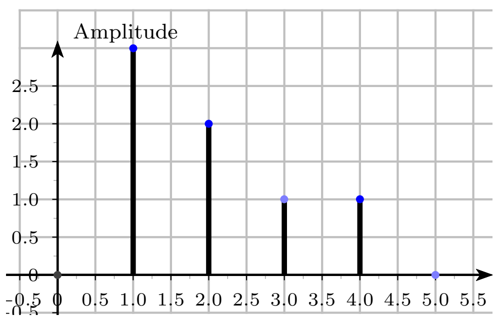
1. Calculer la valeur moyenne du signal suivant :

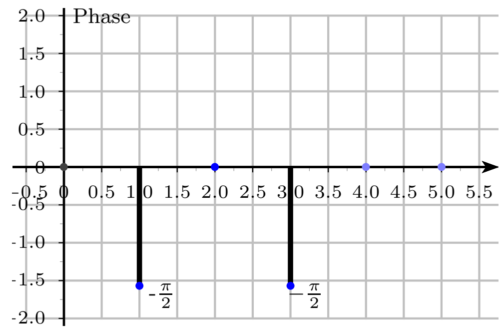


2. Calculer l'énergie moyenne du signal suivant :



3. On considère les spectres d'amplitude et de phase (en fonction du sinus) d'un signal :





Répondre par vrai ou faux en justifiant.

(a) Le signal est pair.

(b) L'énergie moyenne vaut 15.

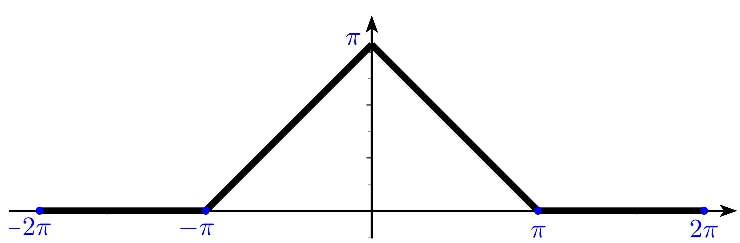
Exercice 4 ***Chapitres 3 : Séries de Fourier***

Soit le signal π-périodique f défini par $f(t) = \cos(t)$ sur l'intervalle $]0; \pi[$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $]-\pi; 2\pi[$.
2. Montrer que $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.
3. Montrer que $b_n = \dfrac{8n}{\pi(4n^2-1)}$.
4. Écrire la série de Fourier de f.

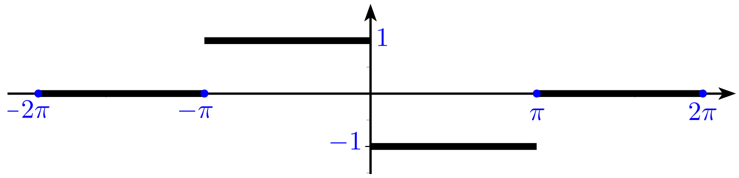
Exercice 5 ***Chapitres 3 : Séries de Fourier***

Soit f le signal 4π périodique dont la représentation sur $[-2\pi; 2\pi]$ est :



1. Déterminer la valeur moyenne du signal.
2. On admet que $a_n = \dfrac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$.
   Tracer les spectres d'amplitude et de phase (par rapport au sinus) des 4 premières harmoniques de la série de Fourier de f.

3. Déduire des questions précédentes les coefficients de Fourier du signal suivant :



Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 26 novembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 4 : Produit de convolution***

Tracer la représentation graphique des signaux suivants :

1. $f(t) = \Lambda(t-1) + \Lambda(t)$
2. $g(t) = \dfrac{1}{\epsilon}\Pi\left(\dfrac{t}{\epsilon}\right)$ avec $\epsilon = 3$
3. $h(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{2}t+3\right)\delta(t-k)$

Exercice 2 ***Chapitre 4 : Produit de convolution***

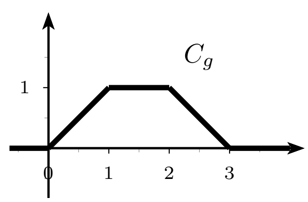
1. Calculer les produits de convolutions de f par g

   (a) $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (2t-1)\mathcal{U}(t)$

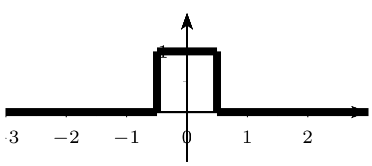
   (b) $f(t) = \cos(2t)\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = t\mathcal{U}(t)$

2. Tracer les produits de convolutions de f par g sans justifier :

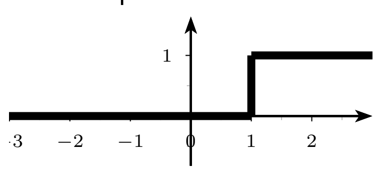
   (a) $f(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-4)$ et la courbe de g est :



   (b)



et



$f(t) = \Pi(t)$ $g(t) = \mathcal{U}(t-1)$

3. Soit $F(p) = \dfrac{4}{p(p-2)^2}$ la transformée de Laplace d'une fonction f.

   (a) Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions $F_1(p) = \dfrac{1}{p}$ et $F_2(p) = \dfrac{1}{(p-2)^2}$ (on pourra utiliser le formulaire en fin de sujet !).

   (b) En décomposant F comme un produit de 2 transformées de Laplace, déterminer f.

Exercice 3 ***Chapitre 7 : Equations différentielles***

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   (a) $(E_1) : y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = -3e^{3t}$

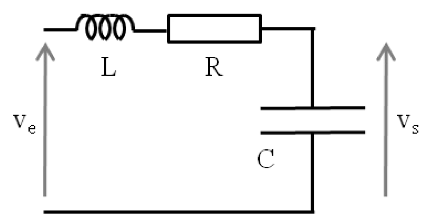
   (b) $(E_2) : y''(t) = -3e^{3t}$

   (c) $(E_3) : y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = 0$
   avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

2. Donner une équation différentielle d'ordre 2, homogène, qui admette la fonction $y(t) = e^{-2t}(\cos(3t) + 2\sin(3t))$ comme solution.

Exercice 4 ***Chapitre 7 : Equations différentielles***

On considère le circuit RLC suivant :



On suppose que la tension en entrée $V_e = E$ est constante. On suppose que $V_s(0) = 0$ et $V_s'(0) = 0$.

1. Montrer que la sortie V_s est solution de

$$\frac{1}{\omega_0^2} s''(t) + \frac{2m}{\omega_0} s'(t) + s(t) = E \qquad (\star)$$

   où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \dfrac{RC\omega_0}{2}$.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à $(\star)$.
3. À quelle condition sur les paramètres m et ω_0, le polynôme caractéristique admet-il deux racines réelles ? Donner alors l'expressions des 2 racines du polynôme en fonction de m et ω_0 (on les notera r_1 et r_2 pour la suite).
4. On suppose que $m > 1$:
   (a) Donner la forme des solutions de l'équation homogène associée à $(\star)$.
   (b) Donner l'ensemble des solutions de $(\star)$.
   (c) Montrer que l'unique solution de $(\star)$ est la fonction

$$s(t) = E\left(1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}\right)$$

5. Appliquez la transformée de Laplace à l'équation différentielle $(\star)$ puis en déduire l'expression de $S(p)$, la transformée de Laplace de $s(t)$ en fonction de E, ω_0 et m.

Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Fonction	Transformée de Laplace
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 21 janvier 2022 - Durée : 1h

Tout appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 6 : Transformée de Fourier***

Représenter les signaux suivants et donner leur transformée de Fourier :

1. $f(t) = \Pi\left(\frac{t+4}{2}\right)$
2. $g(t) = \Lambda\left(\frac{3t}{2}\right)$

Exercice 2 ***Chapitre 6 : Transformée de Fourier***

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{si } \; x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ -x+\frac{1}{2} & \text{si } \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f.
2. Déterminer la transformée de Fourier de f **avec la définition**.
3. **En déduire** la transformée de Fourier de la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ -1 & \text{si } \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3 ***Chapitre 1 : Suites et séries numériques***

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

1. $\sum \frac{2^n}{3}$
2. $\sum \frac{n^2+n+3}{4n^4+2n^2+1}$
3. $\sum \frac{n^2}{n!}$
4. $\sum \left(n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^n$

Exercice 4 ***Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$***

Déterminer le domaine de convergence de la transformée en $\mathcal{Z}$: $\sum a_n z^{-n}$ dans les cas suivants (les signaux discrets (a_n) sont considérés comme causaux) :

1. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2. $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{3n}}$
3. $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 5 ***Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$***

1. Déterminer, en justifiant, la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants :
   (a) $x_1(n) = 3^n \mathcal{U}(n-2)$
   (b) $x_2(n) = \left(\frac{n+4}{3}\right)\mathcal{U}(n)$
   (c) $x_3(n) = \frac{n}{2^n}\mathcal{U}(n)$
2. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de :
   (a) $Y_1(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3}$
   (b) $Y_2(z) = \frac{1}{1+4z^{-1}}$
   (c) $Y_3(z) = \frac{z^{-1}-z^{-4}}{(1-z^{-1})^2}$

Chapitre 11

DS de l'année 2020-2021

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 25 septembre 2020 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 2 : Révisions sur le calcul intégral***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt$
2. $J = \displaystyle\int_0^\pi \cos(u)\sin(3u)du$
3. $K = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)dt$
4. $L = \displaystyle\int_1^3 \frac{t^2+1}{\sqrt{t^3+3t}}dt$
5. $M = \displaystyle\int_4^5 \frac{2x-3}{x^2-x-6}dx$
6. $N = \displaystyle\int_0^{-1} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$
7. $P = \displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx$

Exercice 2 ***Chapitre 2 : Révisions sur le calcul intégral***

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$Q = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)}dx$$

en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1. Montrer que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ implique $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $dt = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)dx$
2. Calculer Q en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Jeudi 19 novembre 2020 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 7 : Equations différentielles***

Soit R, C et E trois constantes données. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} RCy'(t) + y(t) = E\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 ***Chapitre 3 : Séries de Fourier***

Soit f la fonction paire et périodique de période 4π définie sur $[0; 2\pi]$par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in [0; \pi] \\ 0 \text{ si } x \in]\pi; 2\pi] \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-4\pi; 4\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la série de Fourier de f.
4. En utilisant le théorème de Dirichlet pour une valeur de t judicieusement choisie montrer que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3 ***Chapitre 3 : Séries de Fourier***

Tracer les spectres d'amplitude et de phase du signal suivant :

$$f(t) = 3\cos(50\pi t) + \cos(100\pi t) - \sin(100\pi t) - \sin(200\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(300\pi t) + \frac{1}{4}\sin(300\pi t)$$

Exercice 4 ***Chapitre 3 : Séries de Fourier*** Q.C.M.

Pour chacune des questions suivantes, dire quelles sont les affirmations vraies et les affirmations fausses **en complétant les tableaux ci-dessous sur la feuille**. On ne demande pas de justifier.

(1 point par réponse correcte et complète, -0,5 par réponse incorrecte).

1. Les coefficients de Fourier exponentiels vérifient :

   (a) les c_n sont nuls si f est paire

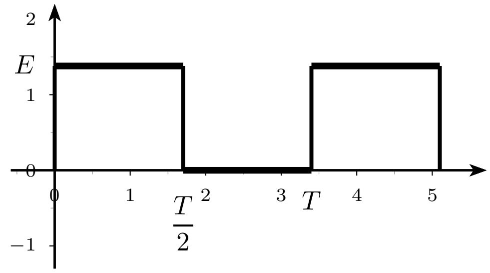
   (b) les c_n sont nuls si f est impaire

   (c) les c_n ne sont jamais tous nuls

   (d) les c_n sont nuls si et seulement f est nulle

Q1	V	F
a)		
b)		
c)		
d)		

2. Les coefficients de Fourier du signal suivant vérifient :



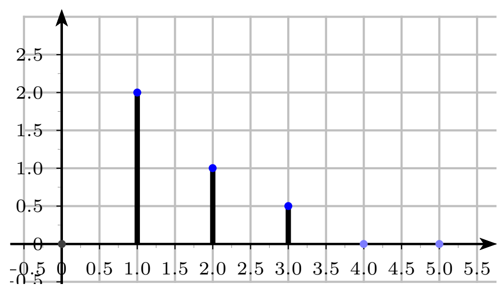
(a) $a_0 = E$

(b) $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$

(c) $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$

Q2	V	F
a)		
b)		
c)		

3. Ce spectre d'amplitude tracé en fonction des pulsations :



peut être celui de :

(a) $f(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(3x)$

(b) $g(x) = 2\cos(2x) + \sin(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(6x)$

(c) $h(x) = 2\cos(x) + \cos(2x) + \sin(2x) + \dfrac{1}{2}\cos(3x)$

(d) $k(x) = \cos(x) + \sin(x) + \sin(2x) + \dfrac{1}{2}\cos(3x)$

Q3	V	F
a)		
b)		
c)		
d)		

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 14 janvier 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

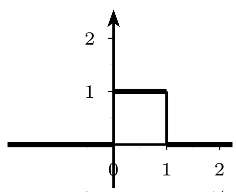
Exercice 1 ***Chapitre 4 : Produit de convolution***

1. Soit $f(t) = e^{-2t}\mathcal{U}(t)$. Calculer :

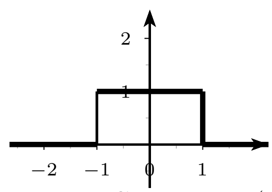
   (a) $f \star \mathcal{U}(t)$.

   (b) $f \star f(t)$.

2. Soit f et g sont définies par leur représentation graphique ci-dessous.

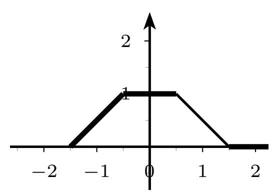


Graphe de f(x)

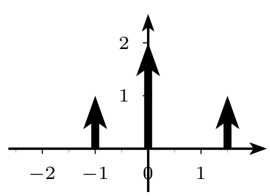


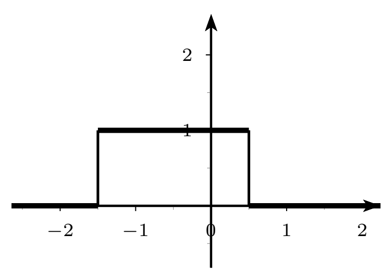
Graphe de g(x)

Le graphe ci-dessous correspond-il à $f \star g(t)$? Répondre par vrai ou faux en justifiant.

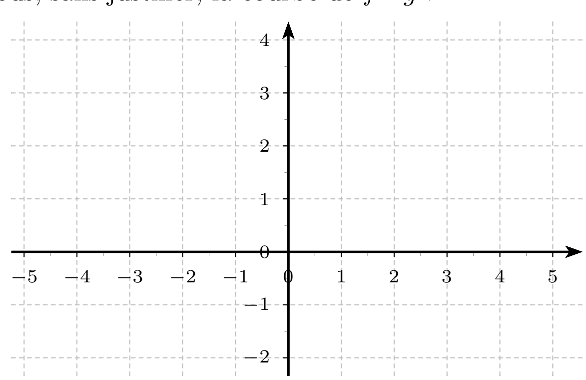


3. Soient f et g les signaux définies par leur représentation graphique :





Tracer sur le graphe ci-dessous, sans justifier, la courbe de $f \star g$:



Exercice 2 ***Chapitre 7 : Equations différentielles***

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses sans justifier en complétant le tableau ci-dessous.

-0.5pt par réponse fausse

	Vrai	Faux
Q1 (a)		
Q1 (b)		
Q1 (c)		
Q1 (d)		

On considère les équations différentielles suivantes :

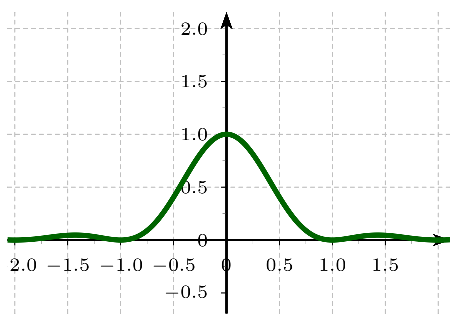
$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = e^{3t} \tag{E}$$

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0 \tag{H}$$

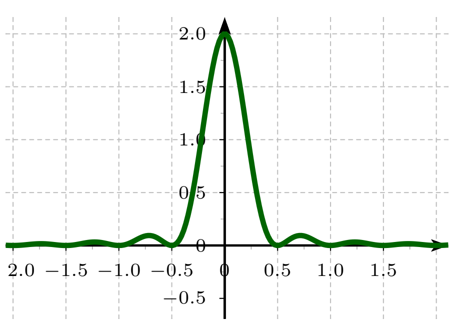
1. Les solutions de (H) sont de la forme $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les solutions de $r^2 - 6r + 9 = 0$
2. La fonction $y(t) = (2t+3)e^{3t}$ est une solution de (H)
3. L'équation différentielle (E) a une unique solution qui est $y(t) = t^2 e^{3t}$
4. L'unique solution de l'équation différentielle (E) vérifiant de plus $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est $y(t) = (t^2 - 2t + 1)e^{3t}$
5. Il existe des solutions de (E) ayant pour limite 0 en $+\infty$

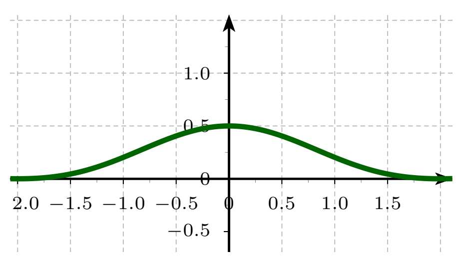
Exercice 3 ***Chapitre 6 : Transformée de Fourier***

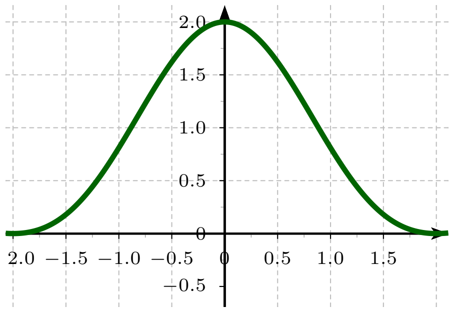
Dans le graphique ci-dessous est représentée la transformée de Fourierd'une certaine fonction f.

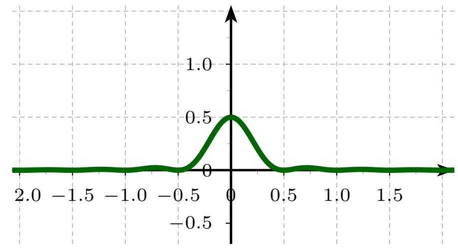


Quelle est la représentation graphique de la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = f(2x)$? Justifiez votre réponse.

1. 

2. 

3. 

4. 

Exercice 4 ***Chapitre 6 : Transformée de Fourier***

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Tracer le graphe de f et calculer sa transformée de Fourier.

2. En utilisant l'identité de Parseval, calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$.

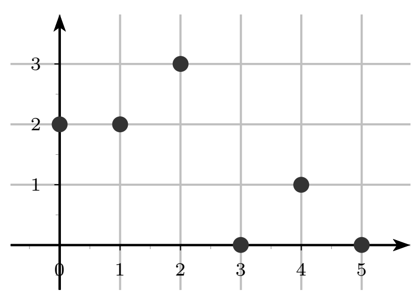
Exercice 5 ***Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$***

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner le domaine de convergence des transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

   (a) $x_1(n) = -2 \times (-3)^n \mathcal{U}(n)$, (b) $x_3(n) = n!\mathcal{U}(n)$.

2. On considère le signal causal $x(n)$ donné par $x(n) = 0$ pour $n \geq 6$ et :



   Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_1(n) = x(n-2)$

3. Soit $y(n)$ un signal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est $Y(z) = \dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^{-3}}$.
   Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_3(n) = 2^n \times y(n)$.

4. Soit $w(n)$ un signal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est $W(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-}1}$.
   Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_4(n) = nw(n)$

5. Calculer la transformée inverse de $X_1(z) = z^{-2} - 2z^{-3} + \dfrac{1}{2}z^{-5}$.