Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 14 janvier 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

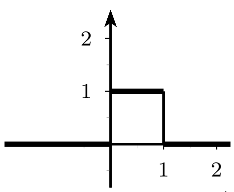
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

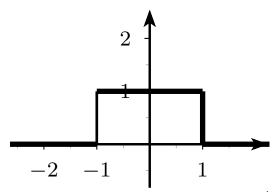
1. Soit $f(t) = e^{-2t}\mathcal{U}(t)$. Calculer :

   (a) $f \star \mathcal{U}(t)$. (b) $f \star f(t)$.

2. Soit f et g sont définies par leur représentation graphique ci-dessous.

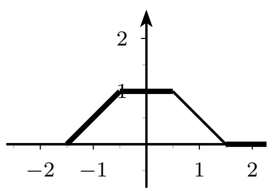


Graphe de f(x)

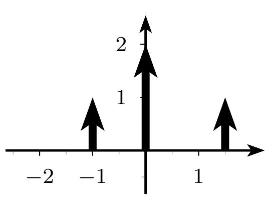


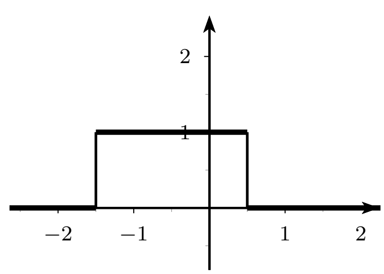
Graphe de g(x)

   Le graphe ci-dessous correspond-il à $f \star g(t)$? Répondre par vrai ou faux en justifiant.

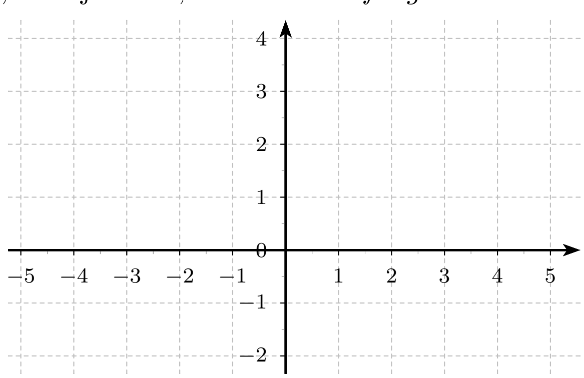


3. Soient f et g les signaux définies par leur représentation graphique :





   Tracer sur le graphe ci-dessous, sans justifier, la courbe de $f \star g$:



Exercice 2 Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses sans justifier en complétant le tableau ci-dessous.
-0.5pt par réponse fausse

	Vrai	Faux
Q1 (a)		
Q1 (b)		
Q1 (c)		
Q1 (d)		

On considère les équations différentielles suivantes :

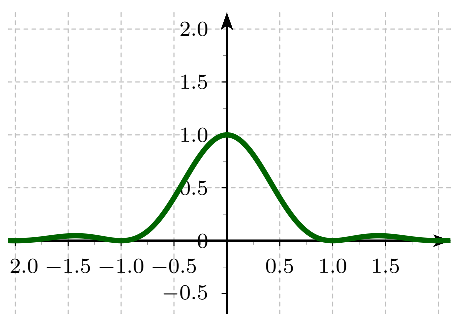
$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = e^{3t} \tag{E}$$

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0 \tag{H}$$

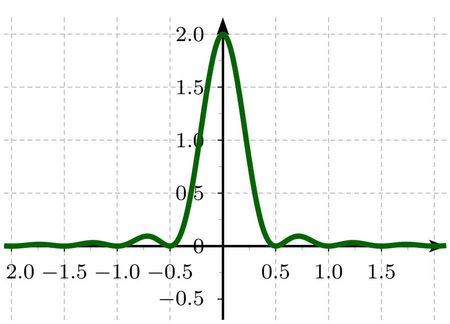
1. Les solutions de (H) sont de la forme $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les solutions de $r^2 - 6r + 9 = 0$
2. La fonction $y(t) = (2t+3)e^{3t}$ est une solution de (H)
3. L'équation différentielle (E) a une unique solution qui est $y(t) = t^2 e^{3t}$
4. L'unique solution de l'équation différentielle (E) vérifiant de plus $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est $y(t) = (t^2 - 2t + 1)e^{3t}$
5. Il existe des solutions de (E) ayant pour limite 0 en $+\infty$

Exercice 3

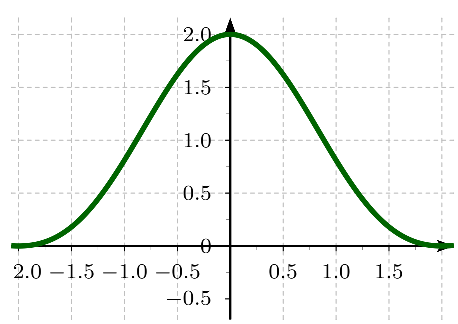
Dans le graphique ci-dessous est représenté la transformée de Fourierd'une certaine fonction f.



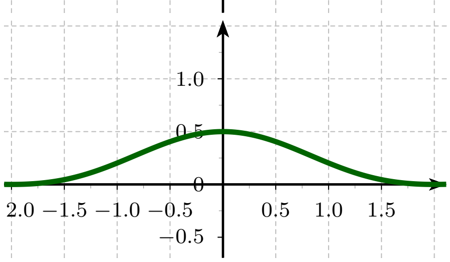
Quelle est la représentation graphique de la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = f(2x)$? Justifiez votre réponse.



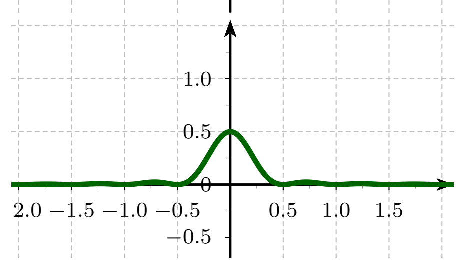
1.



3.



2.



4.

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Tracer le graphe de f et calculer sa transformée de Fourier.

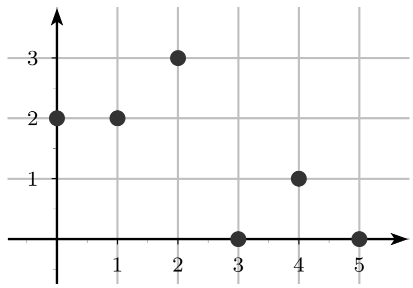
2. En utilisant l'identité de Parseval, calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$.

Exercice 5 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner le domaine de convergence des transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

   (a) $x_1(n) = -2 \times (-3)^n \mathcal{U}(n)$, (b) $x_3(n) = n! \mathcal{U}(n)$.

2. On considère le signal causal $x(n)$ donné par $x(n) = 0$ pour $n \geq 6$ et :



   Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_1(n) = x(n-2)$

3. Soit $y(n)$ un signal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est $Y(z) = \dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^{-3}}$.
   Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_3(n) = 2^n \times y(n)$.

4. Soit $w(n)$ un signal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est $W(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$.
   Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_4(n) = nw(n)$

5. Calculer la transformée inverse de $X_1(z) = z^{-2} - 2z^{-3} + \dfrac{1}{2}z^{-5}$.