Nom : PrÃ©nom : Groupe :

MathÃ©matiques - Devoir SurveillÃ© 3
Mercredi 15 janvier 2020 - DurÃ©e : 1h30

Tout document et appareil Ã©lectronique est interdit

Toute rÃ©ponse doit Ãªtre rigoureusement justifiÃ©e et une attention particuliÃ¨re sera portÃ©e Ã la rÃ©daction et Ã la prÃ©sentation.

Exercice 1

On considÃ¨re la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \pi t + 1 & \text{pour } -\frac{1}{\pi} \leq t \leq 0 \\ -\pi t + 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. ReprÃ©senter la fonction f sur l'intervalle $[-5, 5]$.
2. DÃ©terminer la transformÃ©e de Fourier de f
3. DÃ©terminer la transformÃ©e de Fourier de $g(t) = \begin{cases} \pi & \text{pour } -\frac{1}{\pi} \leq t \leq 0 \\ -\pi & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. (a) Que vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$?

   (b) DÃ©terminer la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right|^4 dt$.

Exercice 2

Donner le domaine de convergence des transformÃ©es en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

1. $x_1(n) = 3 \times 5^n \mathcal{U}(n)$
2. $x_2(n) = n^3 \mathcal{U}(n)$
3. $x_3(n) = \dfrac{1}{n^n} \mathcal{U}(n)$

Exercice 3

1. Calculer la transformÃ©e en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

   (a) $x_1(n) = (-1)^n \mathcal{U}(n)$

   (b) $x_2(n) = n(-1)^n \mathcal{U}(n)$

   (c) $x_3(n) = (-2)^n \mathcal{U}(n-2)$

   (d) $x_4(n) = n(n-1) \mathcal{U}(n-1)$

2. Calculer la transformÃ©e inverse de

   (a) $X_2(z) = \dfrac{z^{-3}}{(1 - z^{-1})^2}$

   (b) $X_3(z) = 1 + 2z^{-2} + z^{-3}$

Exercice 4 ***Extrait de DS 2016***

On considÃ¨re le signal discret causal x dÃ©fini pour $n \geq 0$ par :

$$-6x(n-2) + x(n-1) + x(n) = \delta(n-1)$$

1. Calculer $x(0)$ et $x(1)$.
2. On note $X(z)$ la transformÃ©e en $\mathcal{Z}$ de x. Montrer que :

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{-6z^{-2} - z^{-1} + 1}$$

3. DÃ©duire de ce qui prÃ©cÃ¨de l'expression du signal x en fonction de n.

Exercice 5 On note $f(x) = e^x \ln(1+x)$

1. DÃ©terminer le dÃ©veloppement limitÃ© Ã l'ordre 4 en 0 de $f(x)$.
2. DÃ©terminer le dÃ©veloppement limitÃ© Ã l'ordre 3 en 0 de $f'(x)$.
3. En dÃ©duire le dÃ©veloppement limitÃ© Ã l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{e^x}{1+x}$.
4. (a) DÃ©terminer l'Ã©quation de la tangente Ã la courbe de f au point 0.
   (b) Quelle est la position relative de la courbe de f par rapport Ã sa tangente au point 0.

Exercice 6

1. DÃ©terminer le dÃ©veloppement limitÃ© Ã l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
2. DÃ©terminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
3. DÃ©terminer le dÃ©veloppement limitÃ© Ã l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.