Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Mardi 10 janvier 2017 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminez le domaine de convergence des transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :
   (a) $x_1(n) = \dfrac{1}{n!}\mathcal{U}(n)$
   On applique le critère de d'Alembert :
   $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$
   On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_1(n)z^{-n}$ converge pour tout $|z|>0$.
   (b) $x_2(n) = n^n\mathcal{U}(n)$
   On applique le critère de Cauchy :
   $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_2(n)|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$
   On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_2(n)z^{-n}$ diverge pour tout z.
2. Déterminez la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :
   (a) $x_1(n) = n\mathcal{U}(n-1)$
   On a que $x_1(n) = (n-1)\mathcal{U}(n-1) + \mathcal{U}(n-1) = y(n-1)$, avec $y(n) = n\mathcal{U}(n) + \mathcal{U}(n)$. On sait d'après le cours que $Y(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \dfrac{1}{1-z^{-1}}$. En appliquant la formule du retard, on obtient : $X_1(z) = z^{-1}Y(z) = \dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} + \dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$.
   (b) $x_2(n) = e^{-n}\mathcal{U}(n)$
   On a que $x_2(n) = e^{-n}\mathcal{U}(n) = (e^{-1})^n\mathcal{U}(n)$. On en déduit que $X_2(z) = \dfrac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}$.
3. Calculez la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de :
   (a) $X_1(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+2}$
   En multipliant le numérateur et le dénominateur de X_1 par z^{-2}, on peut réécrire X_1 sous la forme : $X_1(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+2z^{-2}} = Y\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)$ avec $Y(z) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}}{1-2\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}+z^{-2}}$.
   D'après le cours, on sait que Y est la transformée en $\mathcal{Z}$ de $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)\mathcal{U}(n)$. On en déduit que X_1 est la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_2(n) = (\sqrt{2})^n\sin\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)\mathcal{U}(n)$.

(b) $X_2(z) = \dfrac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$, avec $N \in \mathbb{N}^*$.

On a que $X_2(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} (z^{-1})^n$. On en déduit que X_2 est la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_2(n) = 1$ pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et $x_2(n) = 0$ sinon.

Exercice 2

On considère le signal discret causal x défini par :

$$\begin{cases} x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = \delta(n), \\ x(0) = 0, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

1. Calculer $x(2)$ et $x(3)$.

   On obtient par le calcul que $x(2) = 1$ et $x(3) = 3$.

2. On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de x. Montrez que :

$$X(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}. \tag{1}$$

   En prenant la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = \delta(n)$ et en appliquant la formule de l'avance, on obtient :

$$z^2 X(z) - 3zX(z) + 2X(z) = 1 \Leftrightarrow X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

   En effectuant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, on obtient (1).

3. Déduire de ce qui précède l'expression du signal x en fonction de n.

   On a que

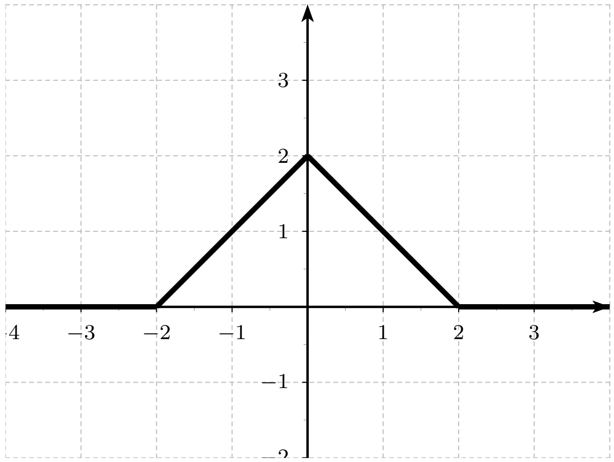
$$-\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -z^{-1}\frac{z}{z-1} + z^{-1}\frac{z}{z-2}.$$

   On sait que $\dfrac{z}{z-1}$ est la transformée en $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{U}(n)$ et que $\dfrac{z}{z-2}$ est la transformée en $\mathcal{Z}$ de $2^n\mathcal{U}(n)$. On en déduit grâce à la formule du retard que X est la transformée en $\mathcal{Z}$ de $-\mathcal{U}(n-1) + 2^{n-1}\mathcal{U}(n-1)$.

Exercice 3 On considère la fonction paire f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1. Représentez la fonction f sur l'intervalle $[-4, 4]$.



2. Calculez sa transformée de Fourier de trois façons :

   (a) directement (avec la définition) La fonction f est paire, on a donc que :

   $$\mathcal{F}(f)(s) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\cos(2\pi s x)dx = 2\int_0^2 (-x+2)\,\cos(2\pi s x)dx.$$

   En effectuant une IPP (on intègre $\cos(2\pi s x)$ et on dérive $-x+2$) on trouve que $\mathcal{F}(f)(s) = \left(\frac{\sin(2\pi s)}{\pi s}\right)^2$.

   (b) en exprimant f en fonction du signal triangulaire Λ

   On a que $f(x) = 2\Lambda\left(\frac{x}{2}\right)$. On sait que $\mathcal{F}(\Lambda)(s) = \left(\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}\right)^2$, d'où $\mathcal{F}(f)(s) = 4\mathcal{F}(\Lambda)(2s) = \left(\frac{\sin(2\pi s)}{\pi s}\right)^2$.

   (c) en utilisant f'

   La fonction f' est impaire et vérifie :

   $$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

   Par définition, on a que :

   $$\mathcal{F}(f')(s) = -2i\int_0^{+\infty} f'(x)\,\sin(2\pi s x)dx = 2i\int_0^2 \sin(2\pi s x)dx = 2i\left[\frac{-\cos(2\pi s x)}{2\pi s}\right]_0^2 = i\frac{1-\cos(4\pi s)}{\pi s}.$$

   D'après le cours, on sait que

   $$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{1}{2i\pi s}\mathcal{F}(f')(s),$$

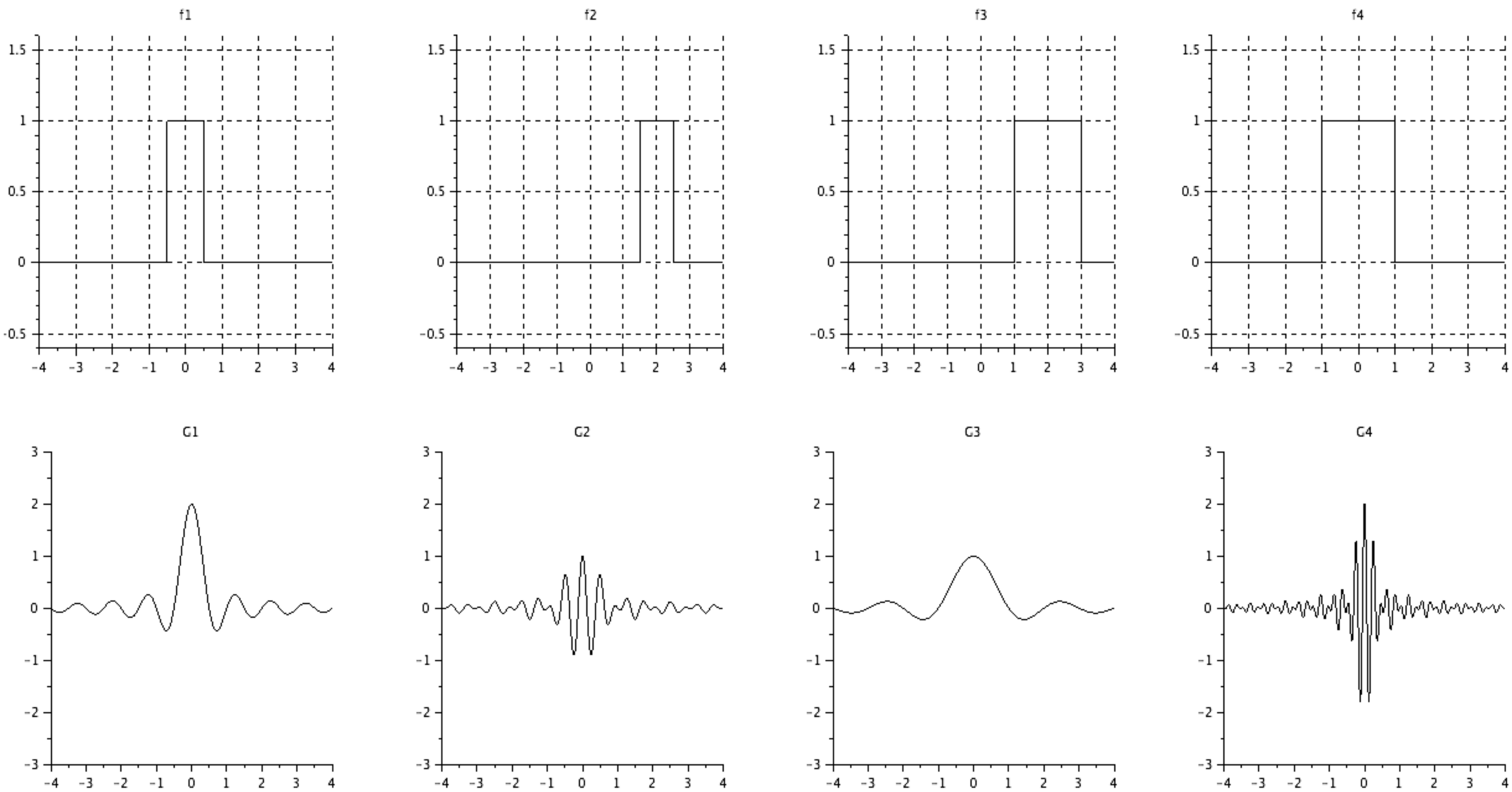
   d'où :

   $$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{i}{2i\pi s}\frac{1-\cos(4\pi s)}{\pi s}.$$

   On conclut en utilisant la formule de trigonométrie suivante : $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Exercice 4 La première ligne du tableau ci-dessous contient les graphes de 4 signaux et la deuxième ligne contient la partie réelle de leurs transformées de Fourier respectives dans un ordre aléatoire.

On notera que la fonction $f1$ est la fonction porte Π.



1. Exprimez $f2$, $f3$ et $f4$ en fonction de $f1$.
   On a $f2(t) = f1(t-2)$, $f3(t) = f1\left(\dfrac{t-2}{2}\right)$ et $f4(t) = f1\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
2. Retrouvez, pour chacune des courbes $G1$, $G2$, $G3$ et $G4$ quel est le signal ($f1$, $f2$, $f3$ ou $f4$) associé en justifiant soigneusement votre réponse.
   D'après le cours, on a :
   (a)
   $$\mathcal{F}(f1)(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi s)}{\pi s} & \text{si } s \neq 0, \\ 0 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$
   (b) $\mathcal{F}(f2)(s) = e^{-4i\pi s}\mathcal{F}(f1)(s)$,
   (c) $\mathcal{F}(f3)(s) = 2e^{-8i\pi s}\mathcal{F}(f1)(2s)$,
   (d) $\mathcal{F}(f3)(s) = 2\mathcal{F}(f1)(2s)$,
   On en déduit alors que $G3 = \mathcal{F}(f1)$, $G1 = \mathcal{F}(f4)$, $G2 = \mathcal{F}(f2)$ et $G4 = \mathcal{F}(f3)$.

Exercice 5 On note $f(t) = e^{-|t|}$. On rappelle que $\mathcal{F}(f)(s) = \dfrac{2}{4\pi^2 s^2 + 1}$.

Montrez, en appliquant la formule de Parseval, que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

On renvoie au TD pour la correction de cet exercice.