Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Mardi 10 janvier 2017 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminez le domaine de convergence des transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

   (a) $x_1(n) = \dfrac{1}{n!}\mathcal{U}(n)$, (b) $x_2(n) = n^n\mathcal{U}(n)$.

2. Déterminez la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

   (a) $x_1(n) = n\mathcal{U}(n-1)$, (b) $x_2(n) = e^{-n}\mathcal{U}(n)$.

3. Calculez la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de :

   (a) $X_1(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+2}$, (b) $X_2(z) = \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$, avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

On considère le signal discret causal x défini par :

$$\begin{cases} x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = \delta(n), \\ x(0) = 0, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

1. Calculer $x(2)$ et $x(3)$.
2. On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de x. Montrez que :

$$X(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

3. Déduire de ce qui précède l'expression du signal x en fonction de n.

Exercice 3 On considère la fonction paire f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$$

1. Représentez la fonction f sur l'intervalle $[-4, 4]$.
2. Calculez sa transformée de Fourier de trois façons :

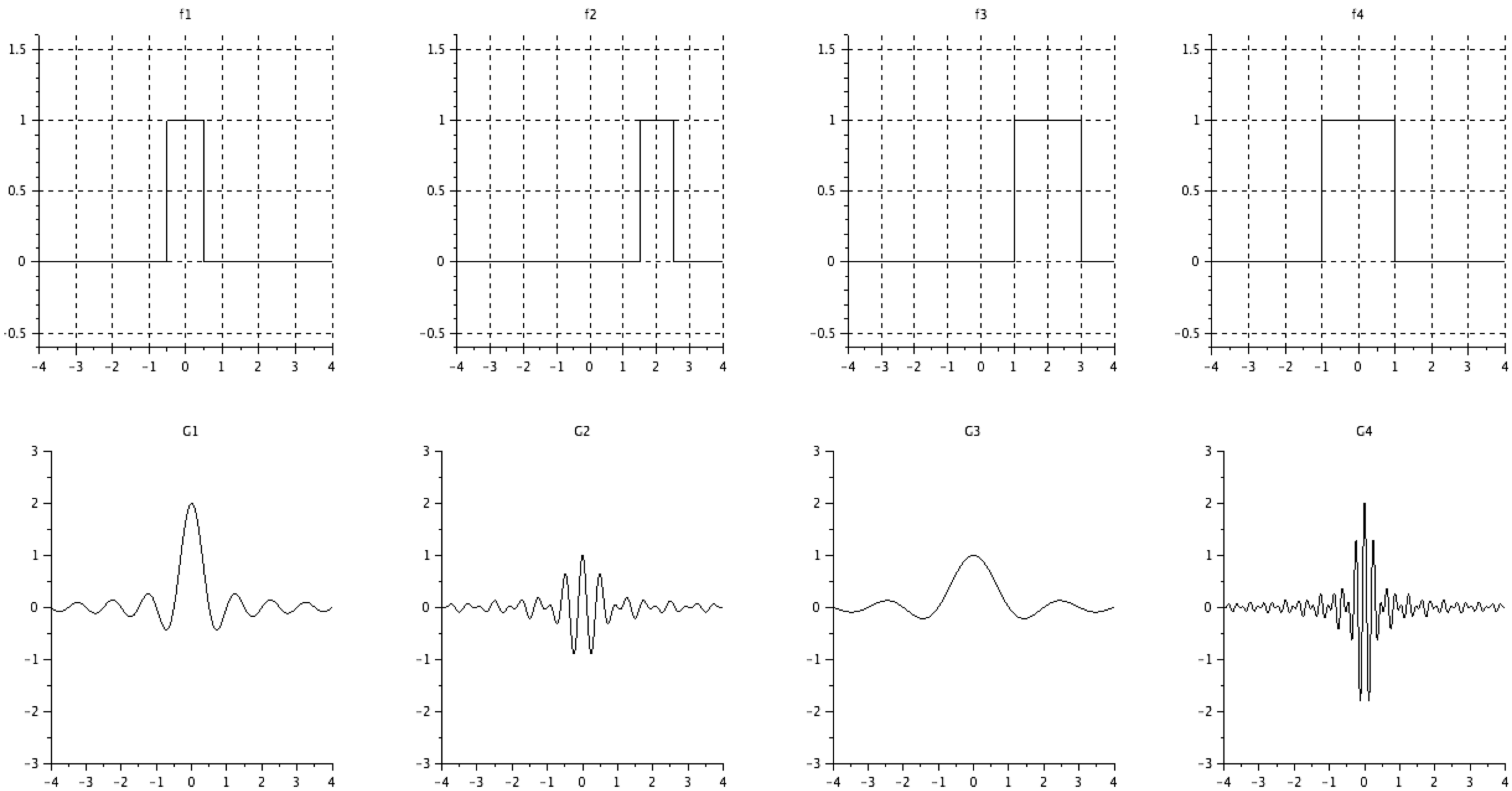
   (a) directement (avec la définition),

(b) en exprimant f en fonction du signal triangulaire Λ,

(c) en utilisant f'.

Exercice 4 La première ligne du tableau ci-dessous contient les graphes de 4 signaux et la deuxième ligne contient la partie réelle de leurs transformées de Fourier respectives dans un ordre aléatoire.

On notera que la fonction $f1$ est la fonction porte Π.



1. Exprimez $f2$, $f3$ et $f4$ en fonction de $f1$.
2. Retrouvez, pour chacune des courbes $G1$, $G2$, $G3$ et $G4$ ci-dessus, quel est le signal ($f1$, $f2$, $f3$ ou $f4$) associé en justifiant soigneusement votre réponse.

Exercice 5 On note $f(t) = e^{-|t|}$. On rappelle que $\mathcal{F}(f)(s) = \dfrac{2}{4\pi^2 s^2 + 1}$.

Montrez, en appliquant la formule de Parseval, que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$