Mathématiques - Devoir Surveillé nř3 - Correction
Jeudi 14 janvier 2016 - Durée : 2h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

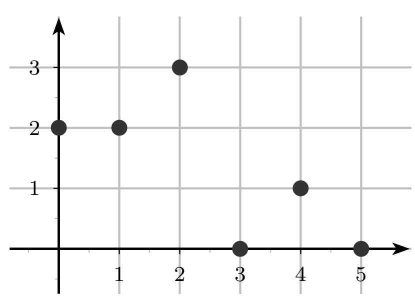
Exercice 1

Donner le domaine de convergence des transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

1. $x_1(n) = -2 \times (-3)^n \mathcal{U}(n)$.
   On sait qu'une suite géométrique a pour rayon de convergence le module de sa raison. Donc le domaine de convergence de x_1 est
   $$D = \{z \in \mathbb{C}\, t.q.\, |z| > 3\}$$
2. $x_2(n) = \dfrac{1}{n^7}\mathcal{U}(n)$.
   On utilise le critère de D'Alembert pour calculer le rayon de convergence :
   $$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_2(n+1)}{x_2(n)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{(n+1)^7} = 1$$
   Donc le domaine de convergence de x_2 est
   $$D = \{z \in \mathbb{C}\, t.q.\, |z| > 1\}$$
3. $x_3(n) = n!\mathcal{U}(n)$. On utilise le critère de D'Alembert pour calculer le rayon de convergence :
   $$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_3(n+1)}{x_3(n)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty$$
   Donc le domaine de convergence de x_3 est vide.

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère le signal causal $x(n)$ donné par $x(n) = 0$ pour $n \geq 6$ et :



   Déterminer les transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

(a) $x_1(n) = x(n-2)$. La transformée en $\mathcal{Z}$ de x est $X(z) = 2 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-4}$. Donc

$$X_1(z) = z^{-2}X(z) = 2z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-6}$$

(b) $x_2(n) = x(n+2)\mathcal{U}(n)$. La transformée en $\mathcal{Z}$ de x est $X(z) = 2 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-4}$. Donc

$$X_1(z) = z^2(X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}) = z^2(X(z) - 2 - 2z^{-1}) = z^2(3z^{-2} + z^{-4}) = 3 + z^{-2}$$

2. Soit $y(n)$ un signal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est $Y(z) = \dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^{-3}}$.
Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_3(n) = 2^n \times y(n)$.
D'après les propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$: $X_3(z) = Y\left(\dfrac{z}{2}\right)$ donc

$$X_3(z) = \frac{4z^{-2}}{(1-2z^{-1})^{-3}}$$

3. Soit $w(n)$ un signal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est $W(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-}1}$.
Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_4(n) = nw(n)$.
D'après les propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$: $X_4(z) = -zW'(z)$ donc

$$X_4(z) = -z\frac{-z^{-2}(1-z^{-1}) - z^{-1} \times 2z^{-2}}{(1-2z^{-1})^2} = -z\frac{-z^{-2} + 2z^{-3} - 2z^{-3}}{(1-2z^{-1})^2} = \frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$$

Exercice 3 Calculer la transformée inverse de :

1. $X_1(z) = \dfrac{z}{z^2+2z-3}$. On fait une décomposition en éléments simples de X_1 (après avoir mis z en facteur) :

$$X_1(z) = z\frac{1}{(z-1)(z+3)} = z \times \left(\frac{\frac{1}{4}}{z-1} - \frac{\frac{1}{4}}{z+3}\right) = \frac{1}{4}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{4}\frac{z}{z+3} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

On identifie alors

$$x_1(n) = \frac{1}{4}\mathcal{U}(n) - \frac{1}{4}(-3)^n\mathcal{U}(n)$$

2. $X_2(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}$. On sait que la transformée en $\mathcal{Z}$ de $y(n) = n\mathcal{U}(n)$ est $Y(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$.
On observe donc que $X_2(z) = -Y(-z)$, donc

$$x_2(n) = -(-1)^n y(n) = (-1)^{n+1}n\mathcal{U}(n)$$

3. $X_3(z) = z^{-2} - 2z^{-3} + \dfrac{1}{2}z^{-5}$. Le signal x_3 est une somme de Dirac retardés :

$$x_3(n) = \delta(n-2) - 2\delta(n-3) + \frac{1}{2}\delta(n-5)$$

Exercice 4

1. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

   (a) $f_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2\pi}, \\ 0 \text{ si } \text{ sinon }. \end{cases}$

   On peut écrire $f_1(t) = \Pi(\pi t)$, avec Π la fonction porte. Donc la transformée de Fourier de f_1 est

   $$F_1(s) = \frac{1}{\pi} F_\Pi\left(\frac{s}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \times \frac{\sin\left(\pi \frac{s}{\pi}\right)}{\left(\pi \frac{s}{\pi}\right)} = \frac{1}{\pi} \times \frac{\sin(s)}{s}$$

   (b) $f_2(t) = e^{-2\pi|t|}$. On sait que la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = e^{-|t|}$ est $\mathcal{F}_{e^{-|t|}}(s) = \dfrac{2}{1+4\pi^2 s^2}$ (on peut facilement retrouver ce résultat par un calcul intégral). Or $f_2(t) = f(2\pi t)$ donc la transformée de Fourier de f_2 est

   $$F_2(s) = \frac{1}{2\pi} F_{e^{-|t|}}\left(\frac{s}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \times \frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{s}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+s^2}$$

2. En déduire la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

   (a) $f_3(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$. D'après le cours la transformée de Fourier de la transformée de Fourier de f est égale à $f(-t)$. La fonction f_3 est égale (à un facteur π près) à la transformée de Fourier de la fonction f_1. Donc

   $$f_3(t) = \pi F_1(t) \Longrightarrow F_3(s) = \pi f_1(-s) = \pi f_1(s)$$

   (b) $f_4(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+t^2}$. De même qu'à la question précédente :

   $$f_4(t) = F_2(t) \Longrightarrow F_4(s) = f_2(-s) = f_2(s)$$

Exercice 5 ***Filtre IIR***

On rappelle que la discrétisation, avec une période d'échantillonage T_e, d'un filtre IIR dont la fonction de transfère est $F(j\omega) = \dfrac{1}{1+\dfrac{jw}{\omega_0}}$, permet d'écrire l'équation de récurrence

$$S(n) = aE(n) + bS(n-1)$$

où a et b sont des constantes liées à w_0 et la fréquence d'échantillonage T_e,
et où $S(n)$ est la réponse pour un signal d'entrée $E(n)$

1. (bonus) Montrer que pour $T_e = 8kHz$ et $\omega_0 = 6000 rad.s^{-1}$ on obitent $a = \dfrac{3}{7}$ et $b = \dfrac{4}{7}$(on approximera l'op

   ---

   On sait que $F(j\omega) = \dfrac{1}{1+\dfrac{jw}{\omega_0}}$. On pose $p = j\omega$, l'égalité s'écrit alors

   $$F(p) + \frac{1}{\omega_0} pF(p) = 1$$

Or $F(p)$ est la transformée de Laplace de $\dfrac{S(t)}{E(t)}$ (par abus de notation on notera indifféremment $S(t)$ et $E(t)$ les signaux temporels de sortie et d'entrée ou $S(p)$ et $E(p)$ leur transformée de Laplace respéctives). Ainsi

$$\frac{S(p)}{E(p)} + \frac{1}{\omega_0} p \frac{S(p)}{E(p)} = 1 \Leftrightarrow S(p) + \frac{1}{\omega_0} p S(p) = E(p)$$

Par transformée de Laplace inverse on obtient (on rappelle que $pF(p)$ est la transformée de Laplace ce $f'(t)$) :

$$S(t) + \frac{1}{\omega_0} S'(t) = E(t)$$

On échantillonne avec la fréquence T_e :

$$S(n) + \frac{1}{\omega_0} \frac{S(n) - S(n-1)}{T_e} = E(n) \Leftrightarrow S(n) \times \left(1 + \frac{1}{\omega_0 T_e}\right) = E(n) + S(n-1) \frac{1}{\omega_0 T_e}$$

Or $\omega_0 T_e = 6000 \times \dfrac{1}{8000} = \dfrac{3}{4}$, donc

$$\frac{7}{3} S(n) = E(n) + \frac{4}{3} S(n-1) \Leftrightarrow S(n) = \frac{3}{7} E(n) + \frac{4}{7} S(n-1)$$

On identifie $a = \dfrac{3}{7}$ et $b = \dfrac{4}{7}$.

2. Montre que la transformée en $\mathcal{Z}$ de $S(n)$, lorsque $E(n)$ est un Dirac (réponse impulsionnelle) est

$$X(z) = a \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

On applique la transformée en $\mathcal{Z}$ à la relation : $S(n) = a\delta(n) + bS(n-1)$:

$$X(z) = a + bz^{-1} X(z)$$

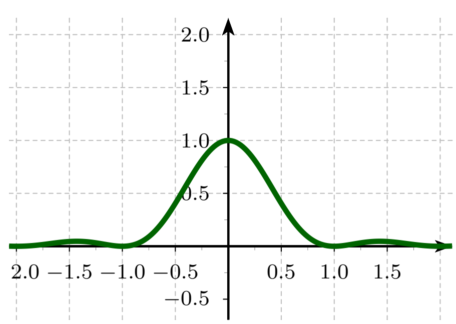
où $X(z)$ est la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal discret S. Donc

$$X(z) \times (1 - bz^{-1}) = a \Leftrightarrow X(z) = a \times \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

3. Déduire la valeur de $S(n)$ en fonction de n lorsque $E(n)$ est un Dirac (réponse impulsionnelle).
On déduit le résultat de la question précédente en déterminant la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de $X(z)$:

$$S(n) = a \times (b)^n \mathcal{U}(n)$$

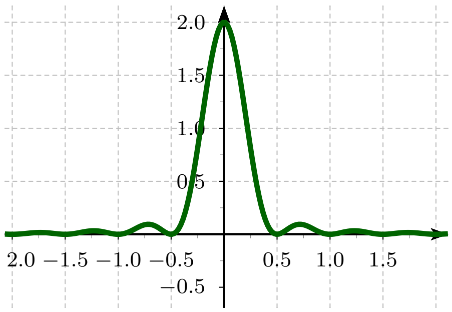
Exercice 6 Dans le graphique ci-dessous est représenté la transformée de Fourierd'une certaine fonction f.



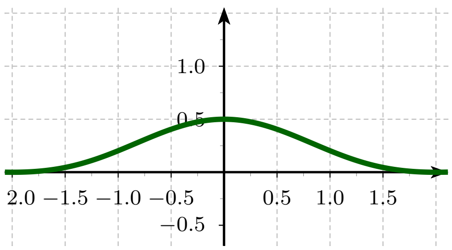
Quelle est la représentation graphique de la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = f(2x)$?
La bonne réponse est la réponse 2. Si on note F et G les transformées de Fourier de f et g, on a la relation suivante

$$G(s) = \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right)$$

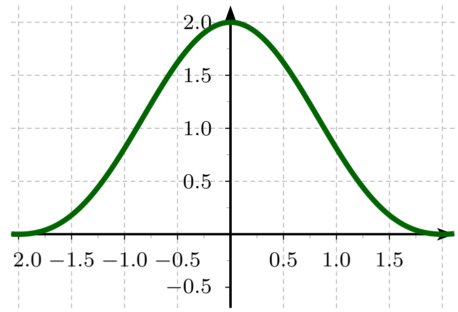
On cherche donc une fonction dont l'amplitude est de 0.5 et telle que la forme de la courbe est étirée horizontalement avec un facteur 2.



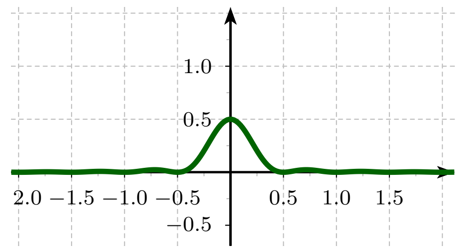
1.



2.



3.



4.

Exercice 7 En utilisant l'identité de Parseval, calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$.

On peut écrire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f_3(x)\right)^2 dx$$

où $f_3(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est la fonction de l'exercice 4. D'après l'identité de Parseval on a $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_3(s)\right)^2 ds$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\pi f_1(s)\right)^2 ds \\ &= \pi^2 \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} 1 ds \\ &= \pi^2 \left[s\right]_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} = \pi^2 \times \frac{2}{2\pi} = \pi \end{aligned}$$