Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 25 novembre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. On considère le signal s suivant :

$$s(t) = 3 - \sin(10t) - 2\cos(20t) + 2\sqrt{3}\sin(20t) + 3\sin(30t) + 2\cos(40t).$$

   (a) Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) du signal s.

   (b) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction s.

2. On considère la fonction f dont les coefficients de Fourier sont donnés par : $\begin{cases} a_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n} \text{ et } a_n = \frac{(-1)^n}{n} \end{cases}$

   (a) Déterminer la série de Fourier de f

   (b) Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) des 4 premières harmoniques de la série de Fourier.

   (c) Déterminer l'energie moyenne de f.

3. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g \text{ est 1-périodique,} \\ g(t) = t,\ \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\end{cases}$

Exercice 2

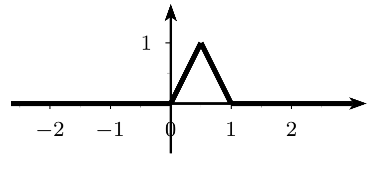
1. Calculer le produit de convolution entre f et g :

   (a) $f(t) = 4t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (t-5)\mathcal{U}(t)$ (b) $f(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = \Pi(t)$

2. Soit $h(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3}(3t+1)\delta(t-k)$

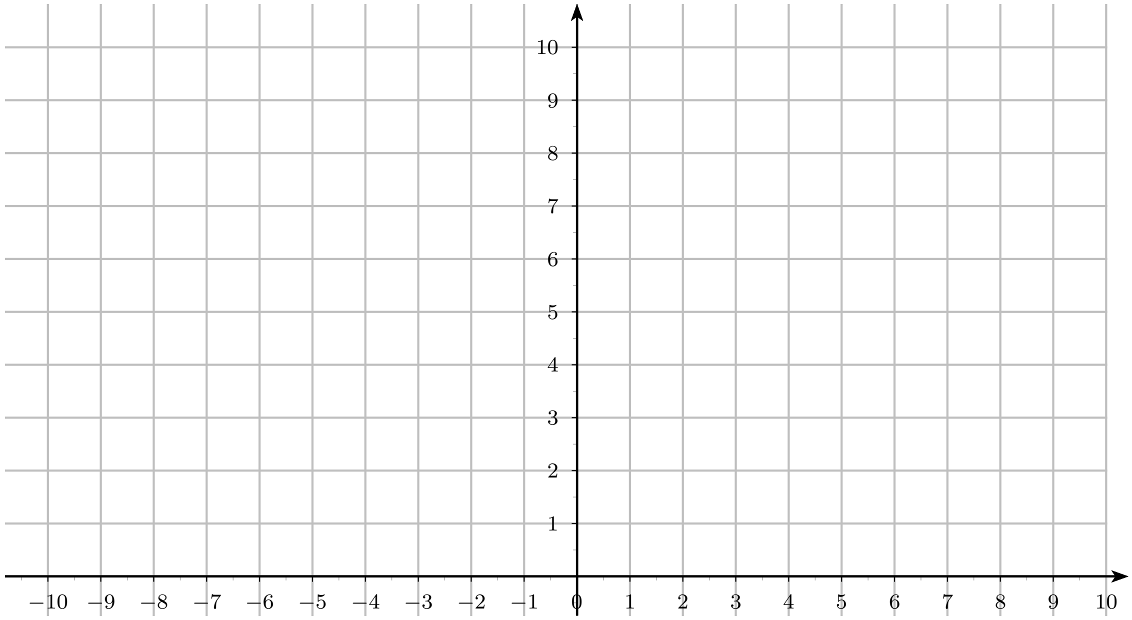
   (a) Représenter h sur le graphique de la page suivante.

   (b) Tracer, sur le même graphique, le produit de convolution de h par k (sans justifier) en sachant que la courbe de k est :



   (c) En utilisant le produit de convolution (et en vous aidant du formulaire de la page suivante), calculer la transformée de Laplace inverse de F définie par :

$$F(p) = \frac{6}{p(p^2+9)}$$



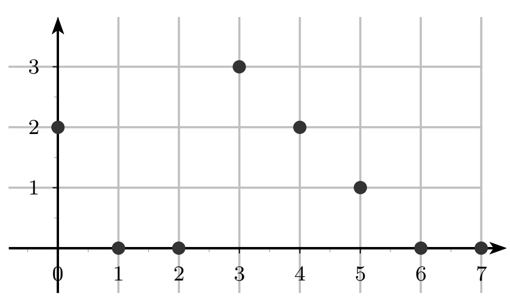
Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$

Fonction	Transformée de Laplace
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Exercice 3

1. Donner la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal numérique causal x.
2. Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = \mathcal{U}(n)$.
3. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \geq 6, y(n) = 0$ et dont le graphe est :



4. Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$