Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 26 novembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Tracer la représentation graphique des signaux suivants :

1. $f(t) = \Lambda(t-1) + \Lambda(t)$
2. $g(t) = \dfrac{1}{\epsilon}\Pi\left(\dfrac{t}{\epsilon}\right)$ avec $\epsilon = 3$
3. $h(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{2}t+3\right)\delta(t-k)$

Exercice 2

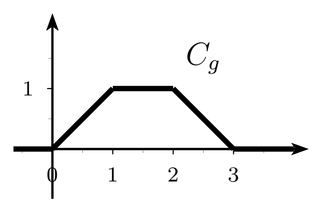
1. Calculer les produits de convolutions de f par g

   (a) $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (2t-1)\mathcal{U}(t)$

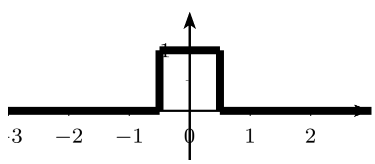
   (b) $f(t) = \cos(2t)\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = t\mathcal{U}(t)$

2. Tracer les produits de convolutions de f par g sans justifier :

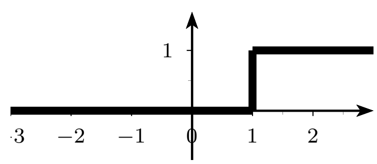
   (a) $f(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-4)$ et la courbe de g est :



   (b)



et



$f(t) = \Pi(t)$ $\qquad$ $g(t) = \mathcal{U}(t-1)$

3. Soit $F(p) = \dfrac{4}{p(p-2)^2}$ la transformée de Laplace d'une fonction f.

   (a) Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions $F_1(p) = \dfrac{1}{p}$ et $F_2(p) = \dfrac{1}{(p-2)^2}$ (on pourra utiliser le formulaire en fin de sujet !).

   (b) En décomposant F comme un produit de 2 transformées de Laplace, déterminer f.

Exercice 3

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

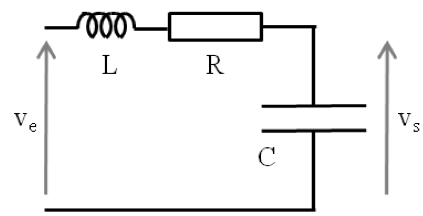
   (a) $(E_1) : y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = -3e^{3t}$

   (b) $(E_2) : y''(t) = -3e^{3t}$

   (c) $(E_3) : y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

2. Donner une équation différentielle d'ordre 2, homogène, qui admette la fonction $y(t) = e^{-2t}\left(\cos(3t) + 2\sin(3t)\right)$ comme solution.

Exercice 4 On considère le circuit RLC suivant :



On suppose que la tension en entrée $V_e = E$ est constante. On suppose que $V_s(0) = 0$ et $V_s'(0) = 0$.

1. Montrer que la sortie V_s est solution de
$$\frac{1}{\omega_0^2} s''(t) + \frac{2m}{\omega_0} s'(t) + s(t) = E \qquad (\star)$$
où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \dfrac{RC\omega_0}{2}$.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à $(\star)$.

3. À quelle condition sur les paramètres m et ω_0, le polynôme caractéristique admet-il deux racines réelles ? Donner alors l'expressions des 2 racines du polynôme en fonction de m et ω_0 (on les notera r_1 et r_2 pour la suite).

4. On suppose que $m > 1$:
   (a) Donner la forme des solutions de l'équation homogène associée à $(\star)$.
   (b) Donner l'ensemble des solutions de $(\star)$.
   (c) Montrer que l'unique solution de $(\star)$ est la fonction
$$s(t) = E\left(1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}\right)$$

5. Appliquez la transformée de Laplace à l'équation différentielle $(\star)$ puis en déduire l'expression de $S(p)$, la transformée de Laplace de $s(t)$ en fonction de E, ω_0 et m.

Formulaire

Fonction	**Transformée de Laplace**
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Fonction	**Transformée de Laplace**
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$