Mathématiques - Correction Devoir Surveillé 2

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Déterminer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{1}{(p+3)(p+1)}$

$$F_1(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)} = \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{2(p+3)} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{e^{-t}\mathcal{U}(t)}(p) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{e^{-3t}\mathcal{U}(t)}(p)$$

On en déduit que F_1 est la transformée de Laplace de $f_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\mathcal{U}(t) - \frac{1}{2}e^{-3t}\mathcal{U}(t)$

2. $F_2(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p(p+1)}$

$$F_2(p) = \frac{e^{-2p}}{p(p+1)} = e^{-2p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = e^{-2p}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{U}(t)}(p) - \mathcal{L}_{e^{-t}\mathcal{U}(t)}(p)\right)$$

On en déduit que F_2 est la transformée de Laplace de $f_2(t) = U(t-2) - e^{-(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$

3. $F_3(p) = \dfrac{24}{5p^5} + \dfrac{4}{5p^3} + \dfrac{3}{5p^2} + \dfrac{1}{p}$

$$\begin{aligned} F_3(p) &= \frac{1}{5} \times \frac{24}{p^5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{p^3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \\ &= \mathcal{L}_{\frac{1}{5}t^4\mathcal{U}(t)}(p) + \mathcal{L}_{\frac{2}{5}t^2\mathcal{U}(t)}(p) + \mathcal{L}_{\frac{3}{5}t\mathcal{U}(t)}(p) + \mathcal{L}_{\mathcal{U}(t)}(p) \end{aligned}$$

On en déduit que F_3 est la transformée de Laplace de $f_3(t) = (\frac{t^4+2t^2+3t}{5} + 1)\mathcal{U}(t)$

4. $F_4(p) = \dfrac{2}{p-\sqrt{2}}$

On en déduit que F_4 est la transformée de Laplace de $f_4(t) = 2e^{\sqrt{2}t}\mathcal{U}(t)$

5. $F_5(p) = \dfrac{p+\pi}{(p+\pi)^2+\pi^2}$

$$F_5(p) = \frac{p+\pi}{(p+\pi)^2+\pi^2} = \mathcal{L}_{\cos(\pi t)\mathcal{U}(t)}(p+\pi) = \mathcal{L}_{e^{-\pi t}\cos(\pi t)\mathcal{U}(t)}$$

On en déduit que F_4 est la transformée de Laplace de $f_5(t) = e^{-\pi t}\cos(\pi t)\mathcal{U}(t)$

Exercice 2 Soit R, C et E trois constantes données. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} RCy'(t) + y(t) = E\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On prend la transformée de Laplace de l'équation :

$$\mathcal{L}_{RCy'(t)+y(t)}(p) = E\mathcal{L}_{\mathcal{U}(t)}(p)$$
$$\Leftrightarrow RC\mathcal{L}_{y'(t)}(p) + \mathcal{L}_{y(t)}(p) = \frac{E}{p}$$

Or $\mathcal{L}_{y'(t)}(p) = p\mathcal{L}_{y(t)}(p) - y(0) = p\mathcal{L}_{y(t)}(p)$ car $v(0) = 0$ d'où l'on déduit que

$$(RCp+1)\mathcal{L}_{y(t)}(p) = \frac{E}{p} \Leftrightarrow \mathcal{L}_{y(t)}(p) = \frac{E}{(RCp+1)p} = \frac{E}{p} - \frac{ERC}{RCp+1} = \frac{E}{p} - \frac{E}{p+\frac{1}{RC}}$$

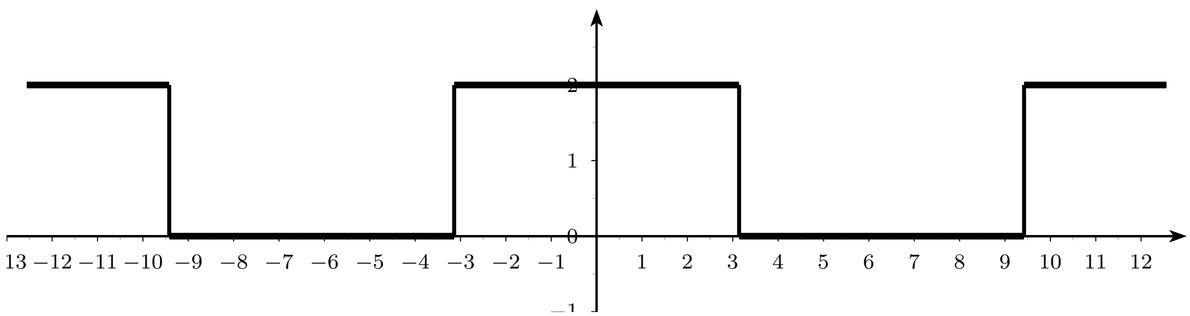
On en déduit par identification que $y(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathcal{U}(t)$

Exercice 3

Soit f la fonction paire et périodique de période 4π définie sur $[0;2\pi]$par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in [0;\pi], \\ 0 \text{ si } x \in]\pi;2\pi]. \end{cases} \tag{1}$$

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-4\pi;4\pi]$.



2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

   Calculons les coefficients de Fourier de f :
   La valeur moyenne $a_0 = 1$ (ça se voit... et on peut le retrouver en calculant l'air du rectangle !).
   Les coefficients b_n sont tous nuls car la fonction est paire.
   Pour calculer les coefficients a_n, on peut utiliser le fait que f est paire :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\cos(n\omega t)dt \\ &= \frac{2}{4\pi} \times 2\int_0^{\pi} 2\cos(n\omega t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\omega\pi}\sin(n\omega\pi) \end{aligned}$$

or $\omega = \dfrac{1}{2}$ donc $a_n = \dfrac{4}{n\pi}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{(2p+1)\pi}(-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}.$

3. En déduire la série de Fourier de f.

   La série de Fourier de f s'écrit

$$S_f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(n\frac{t}{2}\right)$$

   On peut réécrire cette fonction en remarquant que tous les termes pairs de la somme sont nuls :

$$\begin{aligned} S_f(t) &= 1 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) \cos\left((2p+1)\frac{t}{2}\right) \\ &= 1 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} (-1)^p \cos\left((2p+1)\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

4. En utilisant le théorème de Dirichlet pour une valeur de t judicieusement choisie montrer que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

   La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet. En particulier pour $t = 0$ on obtient : $S_f(0) = f(0) = a$ et donc

$$1 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} (-1)^p \cos(0) = 2$$

   soit en réarrangeant l'écriture :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4 Tracer les spectres d'amplitude et de phase du signal suivant :

$$f(t) = 3\cos(50\pi t) + \cos(100\pi t) - \sin(100\pi t) - \sin(200\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(300\pi t) + \frac{1}{4}\sin(300\pi t)$$

On réécrit les harmoniques du signal :

$$f(t) = 3\sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin(200\pi t + \pi) + \frac{1}{2}\sin\left(300\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

puis on trace les spectres d'amplitude et de phase du signal en fonction des pulsations.

Exercice 5 Q.C.M.

Pour chacune des questions suivantes, dire quelles sont les affirmations vraies et les affirmations fausses en complétant les tableaux ci-dessous : (1 point par réponse correcte et complète, -0,5 par réponse incorrecte). On ne demande pas de justifier.

1. Les coefficients de Fourier exponentiels vérifient :

(a) les c_n sont nuls si f est paire.

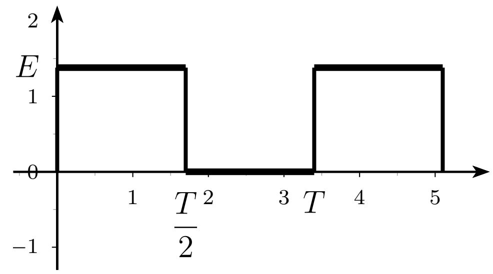
(b) les c_n sont nuls si f est impaire.

(c) les c_n ne sont jamais tous nuls.

(d) les c_n sont nuls si et seulement f est nulle.

Q1	V	F
a)		x
b)		x
c)		x
d)	x	

2. Les coefficients de Fourier du signal T-périodique suivant vérifient :



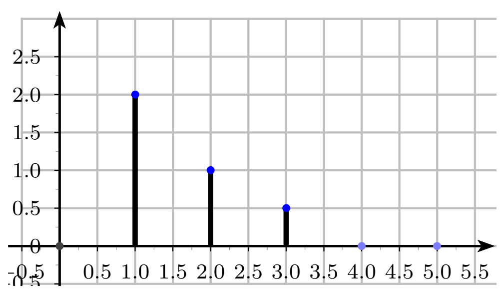
(a) $a_0 = E$

(b) $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

(c) $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Q2	V	F
a)		x
b)	x	
c)		x

3. Ce spectre d'amplitude tracé en fonction des pulsations :



peut être celui de :

(a) $f(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(3x)$

(b) $g(x) = 2\cos(2x) + \sin(4x) + \frac{1}{2}\cos(6x)$

(c) $h(x) = 2\cos(x) + \cos(2x) + \sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(3x)$

(d) $k(x) = \cos(x) + \sin(x) + \sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(3x)$

Q3	V	F
a)		x
b)		x
c)		x
d)		x