Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 22 novembre 2019 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

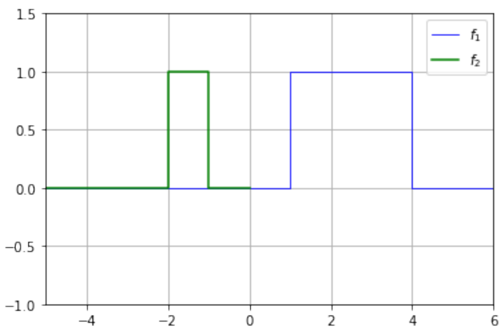
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

On considère les fonctions f_1 et f_2 suivantes :

$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Représenter les fonctions f_1 et f_2 sur l'intervalle $[-3, 5]$.



2. Donner la définition de $f_1 * f_2(t)$

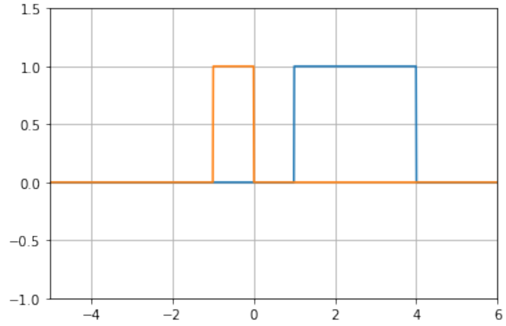
   On a
   $$f_1 * f_2(t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(t-x) dx$$

3. Déterminer les valeurs de : (on justifiera soigneusement les réponses. Le raisonnement pourra s'appuyer sur des graphiques)

   Le produit de convolution $f_1 * f_2(t)$ correspond à l'aire sous la courbe de la fonction $f_1(x)f_2(t-x)$. Nous allons représenter la fonction $f_1(x)$ et $f_2(t-x)$ pour les différentes valeurs de t indiqués ci-dessous. Pour tracer $f_2(t-x)$, remarquons que $f_2(t-x) = f_2(-(x-t))$. La fonction$f_2(t-x)$ est donc obtenue à partir de la courbe de $f_2(-x)$ en effectuant un retard de t.

   (a) $f_1 * f_2(-2)$

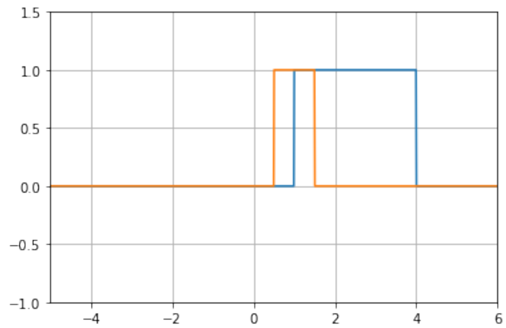
   On a $f_1 * f_2(-2) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(-2-x) dx$



d'où $f_1 * f_2(-2) = 0$

(b) $f_1 * f_2(-1/2)$

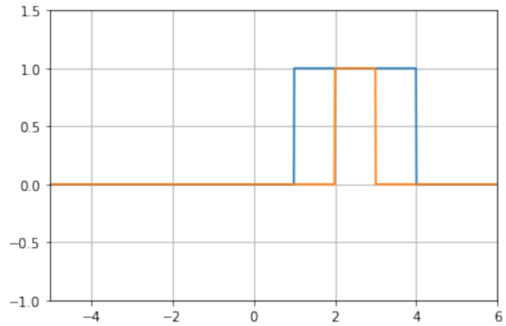
On a $f_1 * f_2(-1/2) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(-1/2 - x)dx$



d'où $f_1 * f_2(-1/2) = 1/2$

(c) $f_1 * f_2(1)$

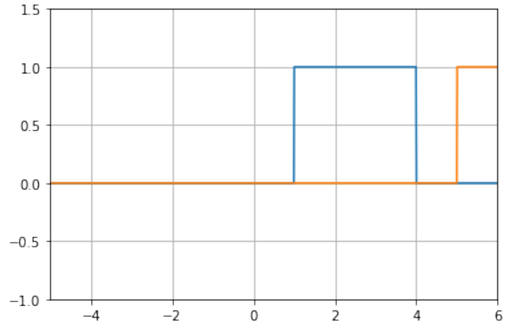
On a $f_1 * f_2(1) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(1 - x)dx$



d'où $f_1 * f_2(1) = 1$

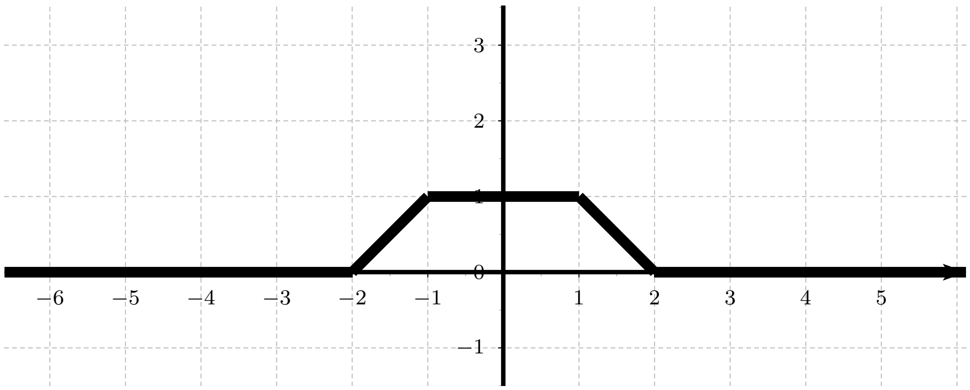
(d) $f_1 * f_2(4)$

On a $f_1 * f_2(4) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(4 - x)dx$

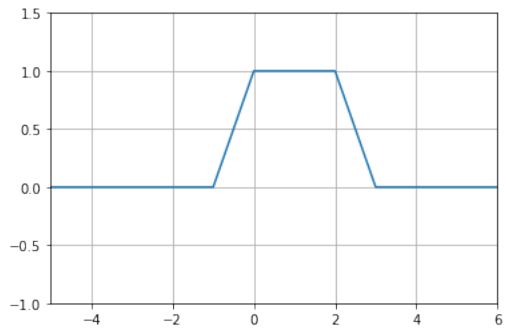


d'où $f_1 * f_2(-2) = 0$

4. La fonction $f_1 * f_2(t)$ est-elle égale à la fonction représentée sur le graphique ci-dessous ? (on justifiera soigneusement les réponses)



Non, par exemple la valeur de $f_1 * f_2(-1/2)$ n'est pas correct. La bonne courbe est



Exercice 2 Les questions 1., 2., 3. et 4. suivantes sont indépendantes.

1. On note $f(t) = t\mathcal{U}(t)$
   (a) Calculer $f * g_1(t)$ avec $g_1(t) = \mathcal{U}(t)$ Les fonctions f et g_1 sont des fonctions causales d'où
   $$f * g_1(t) = \left(\int_0^t x dx\right)\mathcal{U}(t) = \frac{t^2}{2}\mathcal{U}(t)$$
   (b) En déduire $f * g_2(t)$ avec $g_2(t) = \mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t-2)$ On remarque que $g_2(t) = g_1(t+1) - g_1(t-2)$. On utilise alors la linéarité et la formule du retard :
   $$f * g_2(t) = f * g_1(t+1) - f * g_2(t-2) = \frac{(t+1)^2}{2}\mathcal{U}(t+1) - \frac{(t-2)^2}{2}\mathcal{U}(t-2)$$
   d'où
   $$f * g_2(t) = \begin{cases} \dfrac{(t+1)^2}{2} & \text{si } -1 \leq t \leq 2 \\ \dfrac{(t+1)^2}{2} - \dfrac{(t-2)^2}{2} = 3t - \dfrac{3}{2} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On note $f(t) = \Lambda\left(\dfrac{t-1}{2}\right)$ et $g(t) = \delta(t) + 2\delta(t+2) + \dfrac{1}{2}\delta(t-1)$
   (a) Représenter les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sur l'intervalle $[-4, 4]$.

(b) Représenter graphiquement $f * g(t)$

3. Calculer la dérivée de $f * g(t)$ avec $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = te^{-t}\mathcal{U}(t)$.
   D'après le cours, les fonctions f et g étant continues, on a

$$(f * g)'(t) = f' * g(t) = \left(\int_0^t xe^{-x}dx\right)\mathcal{U}(t)$$

   On effectue une IPP :

$$\int_0^t xe^{-x}dx = \left[-e^{-x}x\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}dx = -te^{-t} + \left[-e^{-x}\right]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1 = -e^{-t}(t+1) + 1$$

   d'où $(f * g)'(t) = f' * g(t) = (-e^{-t}(t+1) + 1)\mathcal{U}(t)$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle suivante

$$y'' + 2y' + y = t \ (\star)$$

1. Déterminer l'équation homogène associèe à $(\star)$
   L'équation homogène associèe à $(\star)$ est

$$y'' + 2y' + y = 0$$

2. Résoudre l'équation homogène associèe à $(\star)$
   L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + y = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$. On a $\Delta = 0$. L'équation caractéristique admet une unique racine qui est -1
   On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H = \{(At + B)e^{-t}/(A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. Déterminer une solution particulière de $(\star)$
   On cherche une solution une solution particulière sous la forme $y_p(t) = at + b$. On remplace dans l'équation :

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 2a + at + b = at + 2a + b = t$$

   Par identification, on en déduit que $a = 1$ et $2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2$. Une solution particulière est $y_p(t) = t - 2$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de $(\star)$
   L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H = \{t - 2 + (At + B)e^{-t}/(A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

5. Quelle(s) solution(s) vérifie(nt) $(\star)$ ainsi que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

6. Le système

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

admet-il une unique solution ?
Soit $y \in \mathcal{S}$. On a $y(t) = t - 2 + (At + B)e^{-t}$. Si y vérifie de plus $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$ alors on a :

$$\begin{cases} -2 + B = 0 \\ -1 + (A + B)e^{-1} = 1 \end{cases}$$

On en déduit que $2 = B$ puis $A = \dfrac{2 - 2e^{-1}}{e^{-1}}$. On en déduit que le système admet un unique solution.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante

$$(\star\star) \begin{cases} y'' + 2y' + y = t\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On cherche une solution causale à l'équation $(\star\star)$

1. Exprimer $\mathcal{L}_{y''}(p)$ et $\mathcal{L}_{y'}(p)$ en fonction $\mathcal{L}_y(p)$, $y(0)$ et $y'(0)$
   D'après le cours, on a $\mathcal{L}_{y''}(p) = p\mathcal{L}_y(p) - py(0) - y'(0)$.
2. Montrer que
   $$\frac{1}{p^2(p^2 + 2p + 1)} = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{p}$$
3. Déterminer la transformée de Laplace inverse de $\dfrac{1}{p^2(p^2 + 2p + 1)}$.
   On en déduit que la transformée de Laplace inverse de $\dfrac{1}{p^2(p^2 + 2p + 1)}$ est $(t - 2)\mathcal{U}(t) + e^{-t}(2 + t)\mathcal{U}(t)$.
4. En déduire la valeur de $f * g(t)$ avec $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = te^{-t}\mathcal{U}(t)$. Ce résultat est-il cohérent avec la question 3 de l'exercice 2 ?
   D'après le cours, on a que
   $$\frac{1}{p^2(p^2 + 2p + 1)} = \frac{1}{p^2(p+1)^2} = \mathcal{L}_f(p) \times \mathcal{L}_g(p) = \mathcal{L}_{f*g(t)}(p)$$
   Par identification, on en déduit que
   $$f * g(t) = (t - 2)\mathcal{U}(t) + e^{-t}(2 + t)\mathcal{U}(t) \tag{1}$$
   Calculons $(f * g)'(t)$ en dérivant l'expression précédente (1) :
   $$(f * g)'(t) = \mathcal{U}(t) - e^{-t}(2 + t)\mathcal{U}(t) + e^{-t}\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t) - e^{-t}(1 + t)\mathcal{U}(t)$$
   Ce résultat est donc cohérent avec la question 3 de l'exercice 2 car on retrouve le même résultat.
5. Résoudre $(\star\star)$ en utilisant la transformée de Laplace.
   En prenant la transformée de Laplace de l'équation, on obtient :
   $$(p^2 + 2p + 1)\mathcal{L}_y(p) = \frac{1}{p^2} \Leftrightarrow \mathcal{L}_y(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 2p + 1)}$$
   D'après les questions précédents, on en déduit que la solution du système $(\star\star)$ est $(t - 2)\mathcal{U}(t) + e^{-t}(2 + t)\mathcal{U}(t)$

Exercice 5 Soit

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Calculer la transformée de Fourier de $f(t)$

Soit $s \neq 0$. D'après la définition, $\mathcal{F}(f)(s) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi st} f(t)dt = \int_0^1 e^{-2i\pi st}dt = \left[\frac{e^{-2i\pi st}}{2i\pi s}\right]_0^1 = \frac{e^{-2i\pi s} - 1}{2i\pi s}$

Il faut ensuite calculer $\mathcal{F}(f)(0) = \displaystyle\int_0^1 1\, dt = 1$