Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 23 novembre 2018 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

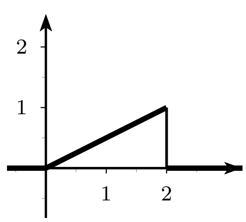
Exercice 1 On connait les coefficients de Fourier exponentiels d'un signal f :

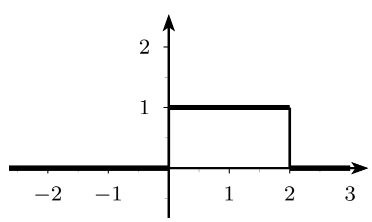
$$c_n(f) = \frac{e-1}{1-2in\pi} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Exercice 2 Calculer $f \star g$:

1. f et g sont définies par leur représentation graphique :





Nous allons calculer $f \star g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$ en étudiant la position relative des parties non nulles de $f(x)$ et $g(t-x)$ selon les valeurs de t (faites des dessins !!!!) :

- Si $t < 0$ alors les fonctions ne sont jamais non nulles simultanément : $f \star g(t) = 0$.
- Si $0 \leq t \leq 2$ alors les parties non nulles de f et g se chevauchent sur $[0;t]$ donc

$$f \star g(t) = \int_0^t \frac{x}{2}dx = \frac{t^2}{4}$$

- Si $2 \leq t \leq 4$ alors les parties non-nulles de f et g se chevauchent sur $[t-2;2]$ donc

$$f \star g(t) = \int_{t-2}^2 f(x)dx = \int_{t-2}^2 \frac{x}{2}dx = 1 - \frac{(t-2)^2}{4}$$

- Si $t > 4$ alors les fonctions ne sont jamais non nulles simultanément : $f \star g(t) = 0$.

Conclusion :

$$f \star g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{t^2}{4} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 1 - \dfrac{(t-2)^2}{4} & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{si} \quad 4 < t \end{cases}$$

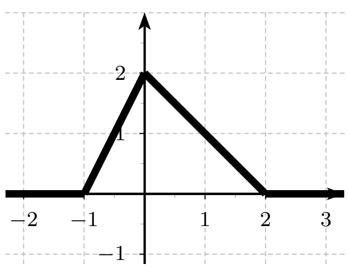
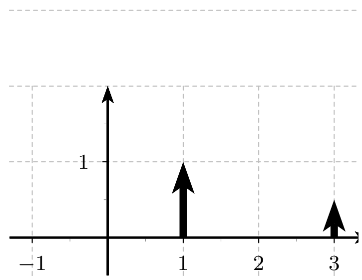
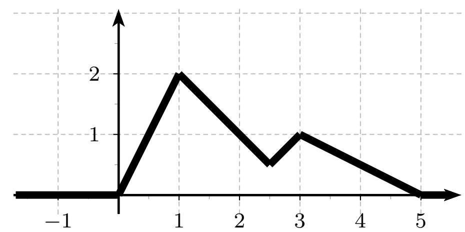
2. $f(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$ et $g(t) = \Lambda(t+1)$

   $f \star g(t) = \Lambda(t+1) + 2\Lambda(t)$

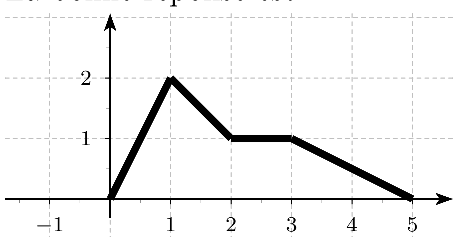
3. $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t-1)$ et $g(t) = \mathcal{U}(t+1)$

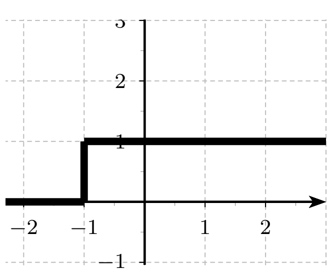
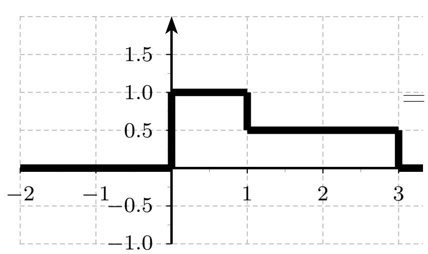
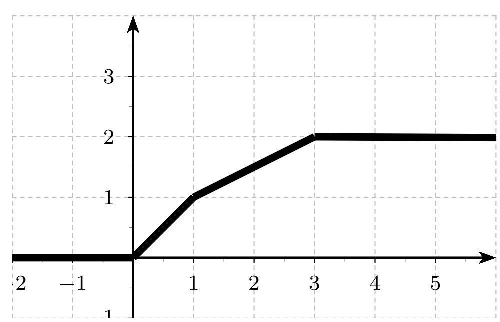
   On note $\tilde{f}(t) = e^{-(t+1)}\mathcal{U}(t)$ et $\tilde{g}(t) = \mathcal{U}(t)$. On a $f(t) = \tilde{f}(t-1)$ et $g(t) = \tilde{g}(t+1)$ d'où d'après le cours $f \star g(t) = (\tilde{f} \star g)(t-1) = (\tilde{f} \star \tilde{g})((t+1)-1) = (\tilde{f} \star \tilde{g})(t) = \left(\int_0^t e^{-(x+1)} dx\right)\mathcal{U}(t) = \left(e^{-1} - e^{-t-1}\right)\mathcal{U}(t)$

Exercice 3 Dire si les produits de convolution suivant sont vrais ou faux en justifiant :

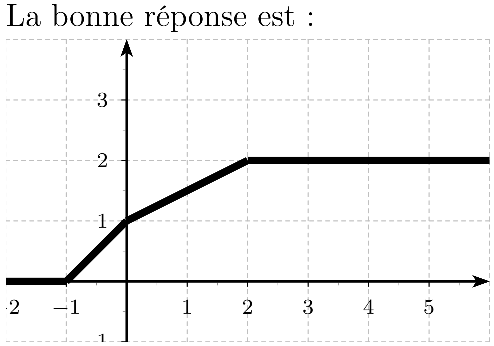
1.  $\star$  $=$ 

   La bonne réponse est

2.  $\star$  $=$ 

   La bonne réponse est :

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

(a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$

On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et $\sin(x) = x + x^2\varepsilon(x)$ d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x} = \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x} = -\frac{x}{2} + x\varepsilon(x) = 0$$

(b) Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{1+x}$

On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$ et $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^5\varepsilon(x)$ d'où

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5\right) = \; & x \quad - \frac{x^3}{6} \quad + \frac{x^5}{120} \\ & - x^2 \quad + \frac{x^4}{6} \\ & + x^3 \quad - \frac{x^5}{6} \\ & - x^4 \\ & + x^5 + x^5\varepsilon(x) \\ = \; & x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{5x^4}{6} + \frac{101}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\sin(x)}{1+x} = x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{5x^4}{6} + \frac{101}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$$

Exercice 5

On considère la fonction F définie par

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)}$$

(a) Donner les transformées de Laplace inverse de $F_1(p) = \dfrac{1}{p^2}$ et de $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2+4}$.

On a $\mathcal{L}_{t\mathcal{U}(t)}(p) = \dfrac{1}{p^2}$ et $\mathcal{L}_{\sin(2t)\mathcal{U}(t)/2}(p) = \dfrac{1}{p^2+4}$

(b) En utilisant un produit de convolution, donner la transformée de Laplace de $F(p)$ inverse de F.

D'après le cours, on a $\mathcal{L}_{f\star g(t)}(p) = \mathcal{L}_{f(t)}(p) \times \mathcal{L}_{g(t)}(p)$. On en déduit que

$$F(p) = \mathcal{L}_{f\star g(t)}(p)$$

avec $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = \sin(2t)\mathcal{U}(t)/2$. Autrement dit, la transformée de Laplace inverse de $F(p)$ est $f \star g(t)$. Comme f et g sont des fonctions causales, on a

$$f \star g(t) = \frac{1}{2}\left(\int_0^t x\sin(2(t-x))dx\right)\mathcal{U}(t)$$

Calculons

$$\begin{aligned}\int_0^t x\sin(2(t-x))dx &= \left[\frac{x\cos(2(t-x))}{2}\right]_0^t - \int_0^t \frac{\cos(2(t-x))}{2}dx \\ &= \frac{t}{2} + \left[\frac{\sin(2(t-x))}{4}\right]_0^t \\ &= \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\end{aligned}$$

d'où $f \star g(t) = \left(\frac{t}{4} - \frac{\sin(2t)}{8}\right)\mathcal{U}(t)$.

Exercice 6

(a) Montrer que le DL à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$ est $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$

D'après le cours, on sait que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ d'où

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x))}$$

On sait d'après le cours que $\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^4\varepsilon(X)$

On pose $X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\end{aligned}$$

(b) Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $\frac{e^x}{\cos(x)}$

D'après le cours, on a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$. Or

$$\begin{aligned}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) = \;& 1 \quad + \frac{x^2}{2} \quad + \frac{5x^4}{24} \\ & + x \quad + \frac{x^3}{2} \\ & + \frac{x^2}{2} \quad + \frac{x^4}{4} \\ & + \frac{x^3}{6} \\ & + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \\ = \;& 1 + x \quad + x^2 + \frac{2x^3}{3} \quad + \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x)\end{aligned}$$

(c) i. Déterminer l'équation de la tangente en 0 de $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$

L'équation de la tangente en 0 de $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$ est la partie principale du $DL_1(0)$: $y = 1 + x$

ii. La courbe de $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$ se situe-t-elle au dessus ou au dessous de sa tangente en 0 ?

D'après la question (b), on a $\dfrac{e^x}{\cos(x)} - (1+x) = x^2 + x^2\varepsilon(x)$. On en déduit que pour tout x au voisinage de 0, $\dfrac{e^x}{\cos(x)} - (1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{\cos(x)} \geq 1+x$. Autrement dit la courbe de $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Fonction	Transformée de Laplace
$\delta(t)$	1
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$