Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 23 novembre 2018 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

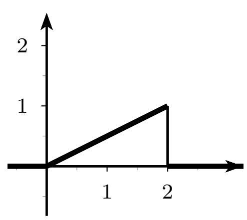
Exercice 1 On connait les coefficients de Fourier exponentiels d'un signal f :

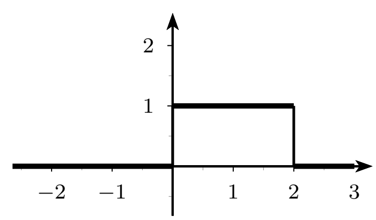
$$c_n(f) = \frac{e-1}{1-2in\pi} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Exercice 2 Calculer $f \star g$:

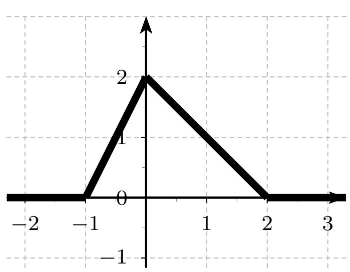
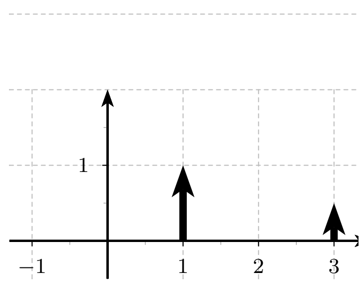
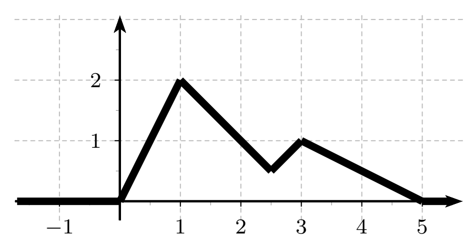
1. f et g sont définies par leur représentation graphique :

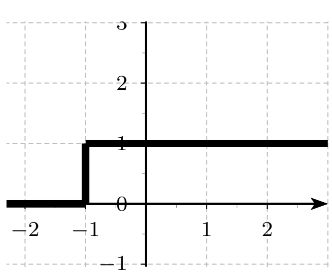
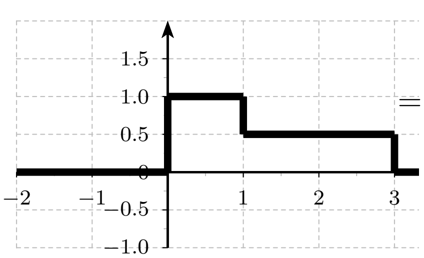
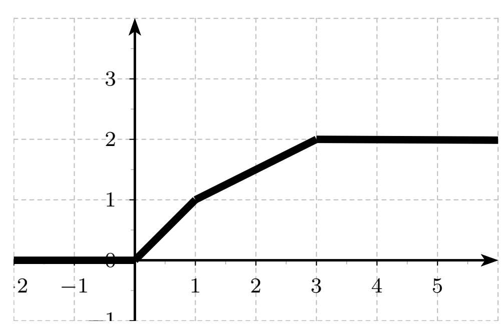




2. $f(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$ et $g(t) = \Lambda(t+1)$
3. $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t-1)$ et $g(t) = \mathcal{U}(t+1)$

Exercice 3 Dire si les produits de convolution suivant sont vrais ou faux en justifiant :

1.  $\star$  $=$ 

2.  $\star$  $=$ 

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

(a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$

(b) Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{1+x}$

Exercice 5

On considère la fonction F définie par

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)}$$

(a) Donner les transformées de Laplace inverse de $F_1(p) = \dfrac{1}{p^2}$ et de $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2+4}$.

(b) En utilisant un produit de convolution, donner la transformée de Laplace inverse de F.

Exercice 6

(a) Montrer que le DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{\cos(x)}$ est $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$

(b) Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$

(c) i. Déterminer l'équation de la tangente en 0 de $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$

ii. La courbe de $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$ se situe-t-elle au dessus ou au dessous de sa tangente en 0 ?

Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Fonction	Transformée de Laplace
$\delta(t)$	1
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$