Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 24 novembre 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Questions de cours :

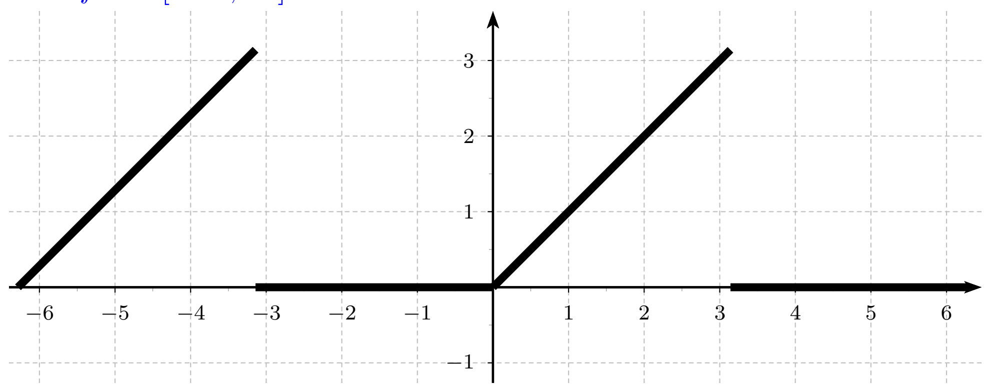
1. Enoncer la formule de Taylor.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction au moins n fois dérivable au voisinnage de 0. Le $DL_n(0)$ de f est
   $$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \ldots + f(n)(0)\frac{x^n}{n!} + x^{n+1}\epsilon(x)$$
   où $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en 0.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt[3]{1+x}$.
   On pose $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. Les dérivées successives de f sont
   $$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}} \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}(1+x)^{-\frac{11}{3}}$$
   Et les valeurs des dérivées successives en 0 sont
   $$f'(0) = \frac{1}{3} \qquad f''(0) = -\frac{2}{9} \qquad f^{(3)}(0) = \frac{10}{27} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{80}{81}$$
   Donc d'après la formule de Taylor-Young, le $DL_4(0)$ de f est
   $$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + x^4\epsilon(x)$$

Exercice 1

1. Soit le signal f, 2π-périodique, défini sur $[0;2\pi[$ par

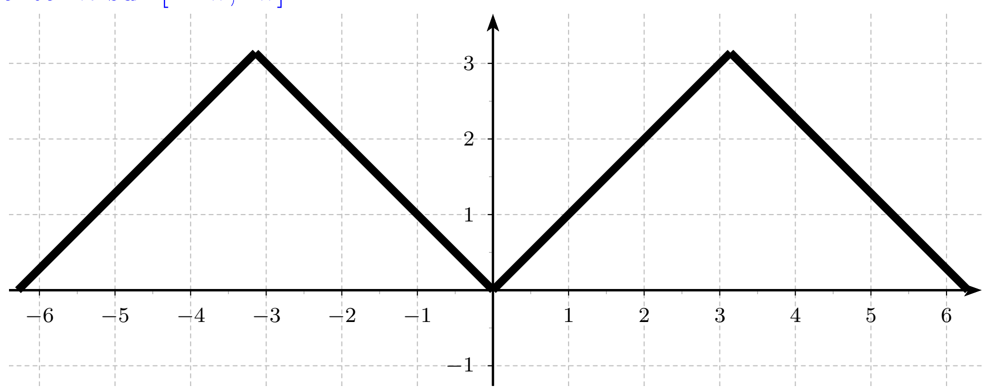
$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in [0;\pi] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]\pi;2\pi[\end{cases}$$

   (a) Représenter f sur $[-2\pi;2\pi]$.



2. On considère la fonction périodique définie par $h(t) = f(-t) + f(t)$.

   (a) Représenter h sur $[-2\pi;2\pi]$.



   (b) Sachant que les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont :

$$\begin{cases} a_0 = & \frac{\pi}{4} \\ a_n = & \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\ b_n = & \frac{-1}{n}(-1)^n. \end{cases}$$

Montrer que la série de Fourier de h est $S_h(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt)$.

On sait que la série de Fourier de f est

$$S_f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{-1}{n}(-1)^n \sin(nt).$$

De plus, la série de Fourier de $g(t) = f(-t)$ est

$$\begin{aligned} S_g(t) &= S_f(-t) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(-nt) + \frac{-1}{n}(-1)^n \sin(-nt) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt) - \frac{-1}{n}(-1)^n \sin(nt) \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de h est

$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \times \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt).$$

(c) Calculer l'énergie moyenne de h.
On utilise le fait que la fonction h^2 est paire :

$$\begin{aligned} E(h) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (h(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \times 2 \int_0^{\pi} (t)^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{3} \pi^3 \\ &= \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

(d) Grâce à l'identité de Parseval, en déduire que $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.
D'après l'identité de Parseval :

$$E(h) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$$

On connaît toutes les informations qui composent cette égalité. On remplace et on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 \times \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \times \frac{(((-1)^n - 1))^2}{\pi^2 n^4} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\pi^2}{12} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(((-1)^n - 1))^2}{n^4} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\pi^2}{12} \times \frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(((-1)^n - 1))^2}{n^4} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\pi^4}{24} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(((-1)^n - 1))^2}{n^4} \end{aligned}$$

Les termes pairs de la somme du membre de droite de la dernière égalité étant nuls, on peut séparer la somme en 2 et ne garder que la somme des termes impairs :

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^4}{24} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(((-1)^n - 1))^2}{n^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^4}{24} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(((-1)^{2n+1} - 1))^2}{(2n+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^4}{24} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((-2))^2}{(2n+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^4}{24} = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

Exercice 2

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\frac{1}{1+x^2}$.

   On sait que le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{1+u}$ est $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + u^4\epsilon(u)$.
   On effectue le changement de variable $u = x^2$ (on peut car $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$). On obtient

   $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4\epsilon(x)$$

   (tous les termes de degré strictement supérieur à 4 « sont rangés » dans le terme d'erreur.)

2. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\arctan(x)$.

   On sait que $arctan$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Donc, par intégration du $DL4(0)$ de la question précédente, on obtient

   $$arctan(x) = arctan(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + x^5\epsilon(x)$$

   Or $arctan(0) = 0$ donc le $DL_5(0)$ de $arctan$ est

   $$arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + x^5\epsilon(x)$$

3. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3}$.

   On utilise le $DL_3(0)$ de $arctan$:

   $$\begin{aligned}
   \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x) - x}{x^3} \\
   &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)}{x^3} \\
   &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{3} + \epsilon(x) \\
   &= -\frac{1}{3}
   \end{aligned}$$

4. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\ln(1+\arctan(x))$.
   On sait que le $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$ est $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + u^3\epsilon(u)$.
   On remplace u par le $DL_3(0)$ de arctan (on peut car $\lim_{x\to 0}\arctan(x) = 0$). On obtient

$$\ln(1+\arctan(x)) = \left(x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)\right)^3 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)\right)^3 + x^3\epsilon(x)$$

   On développe et on tronque à l'ordre 3 :

$$\ln(1+\arctan(x)) = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

   Le $DL_3(0)$ de $\ln(1+arctan(x))$ est donc

$$\ln(1+\arctan(x)) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x)$$

5. En déduire $\lim_{x\to 0}(1+\arctan(x))^{1/x}$.
   On utilise le $DL_3(0)$ de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+\arctan(x))^{1/x} &= \lim_{x\to 0} e^{\ln\left((1+\arctan(x))^{1/x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln((1+\arctan(x)))} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\times(x-\frac{1}{2}x^2+x^3\epsilon(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{1-\frac{1}{2}x+x^2\epsilon(x))} \\
&= e
\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère la fonction F définie par

$$F(p) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) \times \left(\frac{1}{p+1}\right)$$

1. Donner les transformées de Laplace inverse de $F_1(p) = 1 + \frac{1}{p}$ et de $F_2(p) = \frac{1}{p+1}$.
   On identifie

$$f_1(t) = \delta(t) + \mathcal{U}(t) \qquad \text{et} \qquad f_2(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$$

2. En utilisant un produit de convolution, donner la transformée de Laplace inverse de F.
   On note f la transformée de Laplace inverse de F. On a $f(t) = f_1 \star f_2(t)$. Or

$$f_1 \star f_2(t) = \delta \star f_2(t) + \mathcal{U} \star f_2(t)$$

   Donc

$$\begin{aligned}
f_1 \star f_2(t) &= f_2(t) + \int_0^t e^{-x}dx\mathcal{U}(t) \\
&= e^{-t}\mathcal{U}(t) + \left[-e^{-x}\right]_0^t\mathcal{U}(t) \\
&= e^{-t}\mathcal{U}(t) - e^{-t}\mathcal{U}(t) + e^0\mathcal{U}(t) \\
&= \mathcal{U}(t)
\end{aligned}$$

Remarque : La méthode imposée ici n'est évidemment pas judicieuse ... en effet

$$F(p) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) \times \left(\frac{1}{p+1}\right) = \frac{p+1}{p} \times \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p}$$

Exercice 4

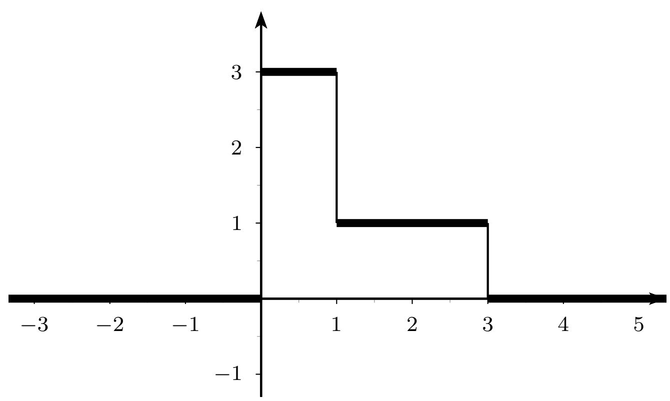
On rappelle que Π est la fonction porte de support $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

1. Soient les fonctions f et g définies par :

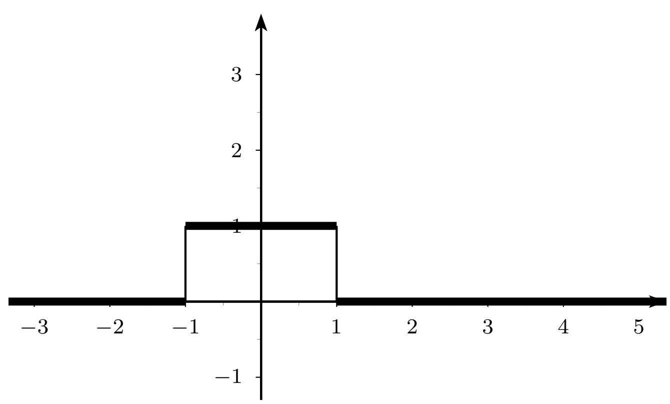
$$\begin{aligned} f(t) =& 3\Pi(t - \frac{1}{2}) + \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right) \\ g(t) =& \Pi\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

(a) Représenter f et g.

Le graphe de f est :



Le graphe de g est :



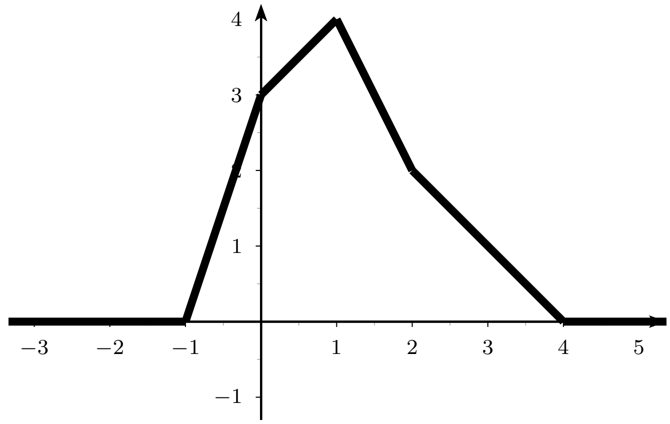
(b) Déterminer le produit de convolution de f et de g.

On doit déterminer le résultat de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)gt-x)dx$ en fonciton de t.

On « retourne » la courbe de g puis on la fait « glisser » de gauche à droite.

On calcule alors l'aire sous la courbe de f sur l'intervalle pour lequel $f(x)$ et $g(t-x)$ sont simultanément non nul.

On obtient



2. Soit la fonction h définie par

$$h(t) = 2\Pi(t-1) - \Pi(t+2),$$

Déterminer le signal s telle que h puisse s'écrire sous la forme $\Pi * s$.
Le signal s est

$$s(t) = 2\delta(t-1) - \delta(t+2)$$

Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Fonction	Transformée de Laplace
$\delta(t)$	1
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$