Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 24 novembre 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Questions de cours :

1. Enoncer la formule de Taylor.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt[3]{1+x}$.

Exercice 1

1. Soit le signal f, 2π-périodique, défini sur $[0;2\pi[$ par

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{si} \quad t\in[0;\pi] \\ 0 & \text{si} \quad t\in]\pi;2\pi[\end{cases}$$

   (a) Représenter f sur $[-2\pi;2\pi]$.

2. On considère la fonction périodique définie par $h(t)=f(-t)+f(t)$.

   (a) Représenter h sur $[-2\pi;2\pi]$.

   (b) Sachant que les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont :

$$\begin{cases} a_0 = & \frac{\pi}{4} \\ a_n = & \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right) \\ b_n = & \frac{-1}{n}(-1)^n. \end{cases}$$

   Montrer que la série de Fourier de h est

$$S_h(t)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos(nt).$$

   (c) Calculer l'énergie moyenne de h.

   (d) Grâce à l'identité de Parseval, en déduire que $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

Exercice 2

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\dfrac{1}{1+x^2}$.
2. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\arctan(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)-x}{x^3}$.
4. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\ln(1+\arctan(x))$.
5. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arctan(x))^{1/x}$.

Exercice 3

On considère la fonction F définie par

$$F(p) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) \times \left(\frac{1}{p+1}\right)$$

1. Donner les transformées de Laplace inverse de $F_1(p) = 1 + \frac{1}{p}$ et de $F_2(p) = \frac{1}{p+1}$.
2. En utilisant un produit de convolution, donner la transformée de Laplace inverse de F.

Exercice 4

On rappelle que Π est la fonction porte de support $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

1. Soient les fonctions f et g définies par :

$$\begin{aligned} f(t) =& 3\Pi(t - \frac{1}{2}) + \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right) \\ g(t) =& \Pi\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

   (a) Représenter f et g.

   (b) Déterminer le produit de convolution de f et de g.

2. Soit la fonction h définie par

$$h(t) = 2\Pi(t-1) - \Pi(t+2),$$

   déterminer le signal s telle que h puisse s'écrire sous la forme $\Pi * s$.

Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

Fonction	Transformée de Laplace
$\delta(t)$	1
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$