Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 25 novembre 2016 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Dans chacun des cas, déterminer le produit de convolution $f \star g$.

   (a) $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (2t-3)\mathcal{U}(t)$.

   Les deux fonctions sont causales, donc

$$\begin{aligned} f \star g(t) &= \left(\int_0^t f(x)g(t-x)dx\right)\mathcal{U}(t) \\ &= \left(\int_0^t x^2(2(t-x)-3)dx\right)\mathcal{U}(t) \\ &= \left(\int_0^t -2x^3+2tx^2-3x^2dx\right)\mathcal{U}(t) \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}tx^3-x^3\right]_0^t\mathcal{U}(t) \\ &= \left(-\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{3}t^4-t^3\right)\mathcal{U}(t) \\ &= \left(\frac{1}{6}t^4-t^3\right)\mathcal{U}(t) \end{aligned}$$

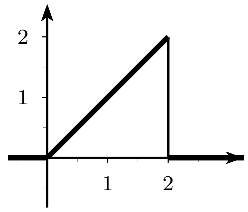
   (b) $f(t) = \delta(t) + e^{2t}\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t)$.

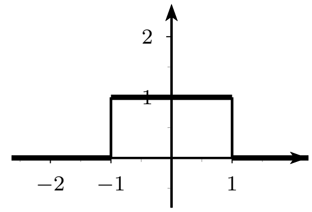
   On sait que $g \star \delta(t) = g(t)$; il suffit donc de calculer le produit de convolution de g par la 2ème “partie” de f, autrement dit par elle même :

$$\begin{aligned} g \star g(t) &= \left(\int_0^t e^{2x}e^{2(t-x)}dx\right)\mathcal{U}(t) \\ &= \left(\int_0^t e^{2x}e^{2t-2x}dx\right)\mathcal{U}(t) \\ &= \left(e^{2t}\int_0^t 1dx\right)\mathcal{U}(t) \\ &= e^{2t}\left[x\right]_0^t\mathcal{U}(t) \\ &= te^{2t}\mathcal{U}(t) \end{aligned}$$

   Donc $f \star g(t) = g(t) + te^{2t}\mathcal{U}(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t) + te^{2t}\mathcal{U}(t)$.

   (c) f et g sont définies par leur représentation graphique :





Nous allons calculer $f \star g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$ en étudiants la position relative des parties non nulles de $f(x)$ et $g(t-x)$ selon les valeurs de t :

- Si $t \leq -1$ alors les fonctions ne sont jamais non nulles simultanément : $f \star g(t) = 0$.
- Si $-1 < t < 1$ alors les parties non-nulles de f et g se chevauchent sur $[0; t+1]$, donc

$$f \star g(t) = \int_0^{t+1} f(x)dx = \int_0^{t+1} xdx = \frac{(t+1)^2}{2}.$$

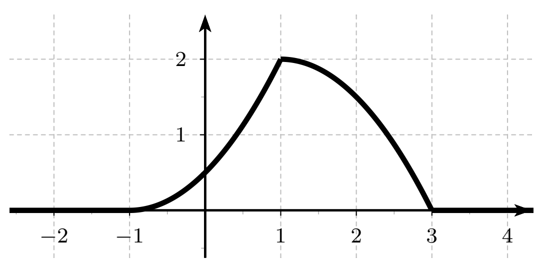
- Si $1 < t < 3$ alors les parties non nulles de f et g se chevauchent sur $[t-1; 2]$, donc

$$f \star g(t) = \int_{t-1}^{2} f(x)dx = \int_{t-1}^{2} xdx = 2 - \frac{(t-1)^2}{2}.$$

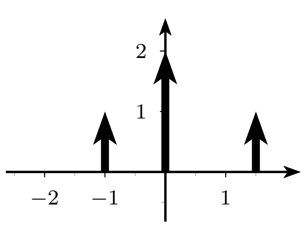
- Si $3 \leq t$ alors les fonctions ne sont jamais non nulles simultanément : $f \star g(t) = 0$.

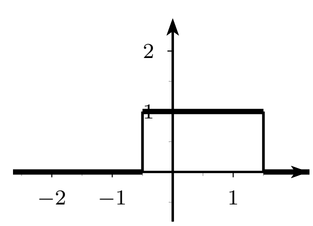
Conclusion :

$$f \star g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq -1 \\ \dfrac{(t+1)^2}{2} & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ 2 - \dfrac{(t-1)^2}{2} & \text{si} \quad 1 < t < 3 \\ 0 & \text{si} \quad 3 \leq \end{cases}$$



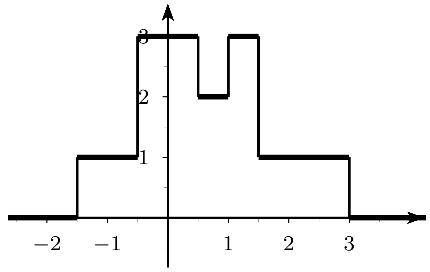
2. Soient f et g les signaux définies par leur représentation graphique :





Tracer, sans justifier, la courbe de $f \star g$.

On sait que le produit de convolution d'un signal par un dirac est le signal de départ “centré” en la position du dirac. On obtient alors :



Exercice 2 Soit F la transformée de Laplace d'une fonction f :

$$F(p) = \frac{4}{p(p-2)^2}$$

On souhaite déterminer la transformée inverse de F de 2 manières différentes.

1. (a) Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions $F_1(p) = \frac{1}{p}$ et $F_2(p) = \frac{1}{(p-2)^2}$.

   La transformée inverse de F_1 est $f_1(t) = \mathcal{U}(t)$.
   La transformée inverse de F_2 est $f_2(t) = te^{2t}\mathcal{U}(t)$.

   (b) En décomposant F comme un produit de 2 transformées de Laplace, déterminer f.

$$F(p) = 4 \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{(p-2)^2} = 4 \times F_1(p) \times F_2(p)$$

   Or la transformée de Laplace d'un produit de convolution est le produit des transformées de Laplace. Donc $f(t) = 4f_1 \star f_2(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= 4f_1 \star f_2(t) \\ &= 4f_2 \star f_1(t) \\ &= 4\left(\int_0^t xe^{2x}dx\right)\mathcal{U}(t) \\ &= 4\left(\left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{2x}dx\right)\mathcal{U}(t) \\ &= 4\left(\left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^t - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^t\right)\mathcal{U}(t) \\ &= (2te^{2t} - e^{2t} + 1)\mathcal{U}(t) \end{aligned}$$

2. (a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $F(p)$.

   Dans la D.E.S. ci-dessous on détermine a en multipliant par p puis en remplaçant p par 0 ; on détermine b en multipliant par $(p-2)^2$ puis en remplaçant p par 2 ; on détermine c en multipliant par p puis en faisant tendre p vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{4}{p(p-2)^2} \\ &= \frac{a}{p} + \frac{b}{(p-2)^2} + \frac{c}{p-2} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{2}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2} \end{aligned}$$

(b) En déduire la transformée inverse de F et comparer le résultat avec celui obtenu dans la question 1.

On détermine la transformée inverse de chaque terme de la D.E.S. de F :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) + 2te^{2t}\mathcal{U}(t) - e^{2t}\mathcal{U}(t)$$

On obtient bien le même résultat avec les 2 méthodes.

Exercice 3 SUJET ENSEA 2013

Soit a un nombre réel et soit f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = \frac{(1+x)e^{-x} - \cos(ax)}{x^3}$$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant soigneusement vos réponses.

1. La fonction f_a est impaire.
   FAUX. $f_a(-x)$ n'est ni égale à $f(x)$ ni à $-f(x)$.
2. Un *DL* de e^{-x} à l'ordre 4 au voisinnage de 0 est $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$.
   VRAI. On remplace x par $-x$ dans le DL de la fonction e^x.
3. Un *DL* de $(1+x)e^{-x}$ à l'ordre 4 au voisinnage de 0 est $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + x^4\epsilon(x)$.
   VRAI.

$$\begin{aligned} (1+x)e^{-x} &= (1+x)(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)) \\ &= 1 + x - x - x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + x^4\epsilon(x) \end{aligned}$$

4. Un *DL* de $\cos(ax)$ à l'ordre 4 au voisinnage de 0 est $1 - \frac{ax^2}{2} + \frac{ax^4}{4} + x^4\epsilon(x)$.
   FAUX. La bonne réponse est $1 - \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{24} + x^4\epsilon(x)$.
5. Un *DL* du numérateur de f_a à l'ordre 4 au voisinnage de 0 est

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{x^3}{3} + (3 + a^4)\frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$$

FAUX. Le terme en x^4 est du mauvais signe.

$$\begin{aligned}(1+x)e^{-x}-\cos(ax) &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}+x^4\epsilon(x)-(1-\frac{(ax)^2}{2}+\frac{(ax)^4}{24}+x^4\epsilon(x))\\ &= \left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{x^3}{3}-\left(\frac{1}{8}+\frac{a^4}{24}\right)x^4+x^4\epsilon(x)\\ &= \left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{x^3}{3}-\left(3+a^4\right)\frac{x^4}{24}+x^4\epsilon(x)\end{aligned}$$

6. f_a admet une limite finie quand x tend vers 0 si et seulement si $a^2=1$.
   VRAI. D'après les questions précédentes, on peut écrire

$$\begin{aligned}f_a(x) &= \frac{\left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{x^3}{3}-(3+a^4)\frac{x^4}{24}+x^4\epsilon(x)}{x^3}\\ &= \left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}+\frac{1}{3}-\left(3+a^4\right)\frac{x}{24}+x\epsilon(x)\end{aligned}$$

   f_a admet une limite finie en 0 si et seulement si le terme en $\frac{1}{x}$ s'annule $\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)$.

7. Pour $a^2=1$, la limite de f_a en 0 est $\frac{1}{6}$.
   FAUX. Si $a^2=1$:

$$f_a(x)=\frac{1}{3}-\frac{x}{6}+x\epsilon(x)$$

   Donc la limite de f_a en 0 est $\frac{1}{3}$.

8. Pour $a^2=1$, la limite de f_a' en 0 est $-\frac{1}{6}$.
   VRAI. Si $a^2=1$ on dérive le développement limité de f :

$$f_a'(x)=-\frac{1}{6}+\epsilon(x)$$

   Donc la limite de f_a' en 0 est bien $-\frac{1}{6}$

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $f(x)=\frac{1}{1+x+2x^2}$.

   On sait que

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+u^2\epsilon(u)$$

   On pose $u=x+2x^2$ (on peut faire ce changement de variable car $x+2x^2$ tend vers 0 quand x tend vers 0).

$$f(x)=1-(x+2x^2)+(x+2x^2)^2+x^2\epsilon(x)=1-x-x^2+x^2\epsilon(x)$$

2. Montrer que les fonctions $f(x)=\ln(1+3x)\sin(2x)$ et $g(x)=6x^2$ sont équivalentes en 0.

On utilise les développements limités à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ et de $\sin(u)$ pour obtenir le DL à l'ordre 2 de f :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+3x)\sin(2x)}{6x^2} &= \frac{(3x-\frac{1}{2}(3x)^2+x^2\epsilon(x))((2x+x^2\epsilon(x))}{6x^2} \\
&= \frac{6x^2+x^2\epsilon(x)}{6x^2} \\
&= 1+\epsilon(x)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)\sin(2x)}{6x^2}=1,$$

autrement dit, la fonction f est équivalente à $6x^2$ au point 0.

3. Soit f une fonciton dont le développement limité à l'ordre 4 est $1+3x-5x^3+7x^4+x^4\epsilon(x)$. Quelle est la position relative entre la courbe de f est sa tangente en 0 ?

   L'équation de la tangente en 0 est $y = 1+3x$. On étudie le signe de $f(x)-(1+3x)$. Au voisinnage de 0 on a

   $$f(x)-(1+3x) = -5x^3+x^3\epsilon(x).$$

   Donc, au voisinnage de 0, si x est négatif alors la différence est positive et si x est positif alors la différence est négative.
   Conclusion : La courbe de f est au-dessus puis en dessous de sa tangente en 0.

Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Fonction	Transformée de Laplace
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$