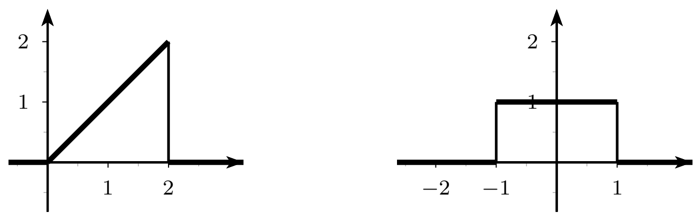
Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 25 novembre 2016 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Dans chacun des cas, déterminer le produit de convolution $f \star g$.
   (a) $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (2t-3)\mathcal{U}(t)$.
   (b) $f(t) = \delta(t) + e^{2t}\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t)$.
   (c) f et g sont définies par leur représentation graphique :



2. Soient f et g les signaux définies par leur représentation graphique :

Tracer, sans justifier, la courbe de $f \star g$.

Exercice 2 Soit F la transformée de Laplace d'une fonction f :

$$F(p) = \frac{4}{p(p-2)^2}$$

On souhaite déterminer la transformée inverse de F de 2 manières différentes.

1. (a) Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions $F_1(p) = \dfrac{1}{p}$ et $F_2(p) = \dfrac{1}{(p-2)^2}$ (on pourra utiliser le formulaire en fin de sujet !).
   (b) En décomposant F comme un produit de 2 transformées de Laplace, déterminer f.
2. (a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $F(p)$.
   (b) En déduire la transformée inverse de F et comparer le résultat avec celui obtenu dans la question 1.

Exercice 3 SUJET ENSEA 2013

Soit a un nombre réel et soit f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = \frac{(1+x)e^{-x} - \cos(ax)}{x^3}$$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant soigneusement vos réponses.

1. La fonction f_a est impaire.
2. Un DL de e^{-x} à l'ordre 4 au voisinnage de 0 est $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$.
3. Un DL de $(1+x)e^{-x}$ à l'ordre 4 au voisinnage de 0 est $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + x^4\epsilon(x)$.
4. Un DL de $\cos(ax)$ à l'ordre 4 au voisinnage de 0 est $1 - \frac{ax^2}{2} + \frac{ax^4}{4} + x^4\epsilon(x)$.
5. Un DL du numérateur de f_a à l'ordre 4 au voisinnage de 0 est
$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{x^3}{3} + (3+a^4)\frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$$
6. f_a admet une limite finie quand x tend vers 0 si et seulement si $a^2 = 1$.
7. Pour $a^2 = 1$, la limite de f_a en 0 est $\frac{1}{6}$.
8. Pour $a^2 = 1$, la limite de f'_a en 0 est $-\frac{1}{6}$.

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x+2x^2}$.
2. Montrer que les fonctions $f(x) = \ln(1+3x)\sin(2x)$ et $g(x) = 6x$ sont équivalentes en 0.
3. Soit f une fonciton dont le développement limité à l'ordre 4 est $1 + 3x - 5x^3 + 7x^4 + x^4\epsilon(x)$.
Quelle est la position relative entre la courbe de f est sa tangente en 0 ?

Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

Fonction	Transformée de Laplace
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$