Mathématiques - Devoir Surveillé n°2 - Correction
Vendredi 20 novembre 2015 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = \cos(\sin(x))$.

1. Rappeler les $DL_4(0)$ de cosinus et sinus :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\epsilon(x)$$

2. Montrer que le $DL_4(0)$ de f est $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\epsilon(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\sin(x)) \\ &= \cos\left(x - \frac{x^3}{3!} + x^4\epsilon(x)\right) \\ &= \cos(X) \quad \text{avec } X = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4!} + X^4\epsilon(X) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4 + x^4\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x \times \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{4!}x^4 + x^4\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)x^4 + x^4\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\epsilon(x) \end{aligned}$$

Remarque : le changement de variable est autorisé car X tend vers 0 quand x tend vers 0.

3. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0 :
Le $DL_3(0)$ de f' s'obtient en dérivant le $DL_4(0)$ de f :

$$f'(x) = -x + \frac{5}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

Donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} -x + \frac{5}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) = 0$

4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
   On obtient l'équation de la tangente en prenant le $DL_1(0)$ de f : $y = 1$
5. Déterminer la position relative de la tangente T par rapport à la courbe C_f au voisinage de 0.
   On étudie le signe de $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\epsilon(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\epsilon(x)$$

   Au voisinage de 0, $f(x) - y$ est du signe de $-\frac{1}{2}x^2$ (le reste du DL est négligeable), donc $f(x) - y < 0$. Donc, au voisinage de 0, la courbe C_f est en dessous de sa tangente.

Exercice 2 Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse en justifiant :

1. Soit f la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x}$. Le $DL_6(0)$ de f
   (a) ne comporte que des termes de degré pair : **VRAI** car la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ est paire.
   (b) commence par un 1 : **VRAI** car $f(0) = 1$
   (c) n'est pas calculable : **FAUX** car f est 6 fois dérivable, donc le $DL_6(0)$ existe.

2. Soient les fonctions f et g dont les $DL_3(0)$ sont :

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

   On connaît les deux DL à l'ordre 3, on peut donc calculer le $DL_3(0)$ du produit ; mais pas le $DL_4(0)$. Pour calculer le $DL_2(0)$ on peut tronquer les 2 DL à l'ordre 2 puis faire le calcul :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(2x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)\right)\left(1 - x + x^2\epsilon(x)\right) \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \\ &= 2x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \end{aligned}$$

   Donc
   (a) Le $DL_1(0)$ de $f \times g$ est $f(x)g(x) = 1 - 2x + x\epsilon(x)$ **FAUX**
   (b) Le $DL_2(0)$ de $f \times g$ est $f(x)g(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$ **VRAI**
   (c) Le $DL_3(0)$ de $f \times g$ n'est pas calculable. **FAUX**
   (d) Le $DL_4(0)$ de $f \times g$ n'est pas calculable. **VRAI**

3. Soit la fonction f dont le $DL_4(0)$ est $f(x) = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + x^4\epsilon(x)$.
   (a) Le $DL_4(0)$ de f' est $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}x + x^3 + x^4\epsilon(x)$: **FAUX** en dérivant on ne peut obtenir que le $DL_3(0)$: $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}x + x^3 + x^3\epsilon(x)$

   (b) Soit F une primitive de f. Le $DL_5(0)$ de F est $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{20}x^5 + x^5\epsilon(x)$: **FAUX**, on ne peut pas connaître le terme constant du DL car on ne connaît pas $F(0)$.

4. La limite de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(2x)\sin(3x)}{x^2}$ quand x tend vers 0 vaut ?
   On cherche le $DL_0(0)$ de f. Il faut utiliser les $DL_2(0)$ car on finit le calcul en divisant par x^2, on va donc perdre 2 degrés.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(2x)\sin(3x)}{x^2} \\ &= \frac{(2x + x^2\epsilon(x))(3x + x^2\epsilon(x))}{x^2} \\ &= \frac{6x^2 + x^2\epsilon(x)}{x^2} \\ &= 6 + \epsilon(x) \end{aligned}$$

   Donc seule la réponse (c) est **VRAI**.

   (a) 0 (b) $+\infty$ (c) 6 (d) $\frac{1}{6}$

Exercice 3 Calculer $f \star g$:

1. $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (1-t)\mathcal{U}(t)$
   On utilise le fait que les deux fonctions sont causales :

$$\begin{aligned} f \star g(t) &= \int_0^t x^2(1-(t-x))dx\mathcal{U}(t) \\ &= \int_0^t x^2 - tx^2 + x^3 dx\mathcal{U}(t) \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - t\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^t \mathcal{U}(t) \\ &= \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 + \frac{1}{4}t^4\right)\mathcal{U}(t) \\ &= \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4\right)\mathcal{U}(t) \end{aligned}$$

2. $f(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$ et $g(t) = \Lambda(t+1)$
   On sait que le Dirac est l'élément neutre pour le produit de convolution ($\delta \star f(t) = f(t)$) et que le produit de convolution par un signal retardé est le produit de convolultion, par le signal d'origine, retardé. Donc :

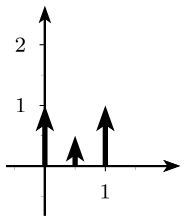
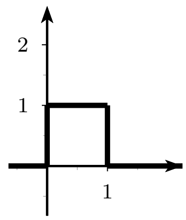
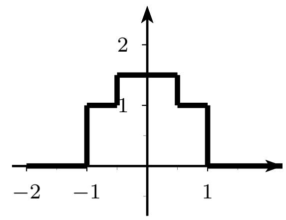
$$f \star g(t) = \Lambda(t+1) + 2\Lambda(t)$$

3. $f(t) = \delta(t+1) + 2\delta(t-1)$ et $g(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) - 3\delta(t-1)$

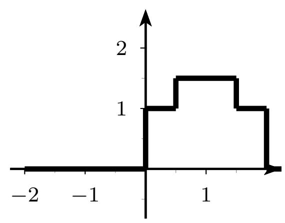
On utilise les mêmes propriétés qu'à la question précédente :

$$f \star g(t) = \frac{1}{2}\delta(t+2) - 3\delta(t) + \delta(t) - 6\delta(t-2) = \frac{1}{2}\delta(t+2) - 2\delta(t) - 6\delta(t-2)$$

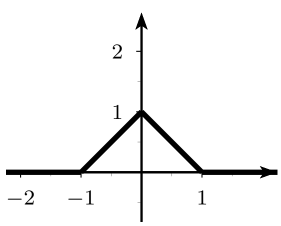
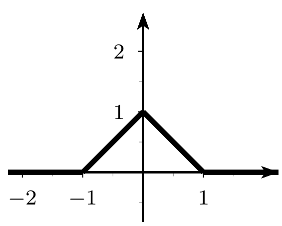
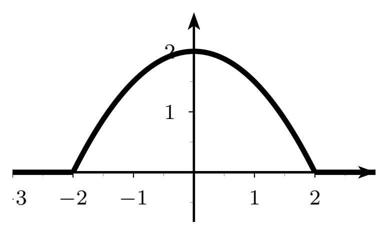
Exercice 4 Dire si les produits de convolution suivant sont vrais ou faux en justifiant :

1.  $\star$  $=$ 

FAUX : le résultat est :



On pouvait se convaincre sans faire le produit de convolution car les 2 signaux sont causaux, donc le résultat doit l'être.

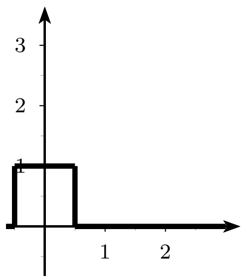
2.  $\star$  $=$ 

FAUX : le produit de convolution en 0 vaut

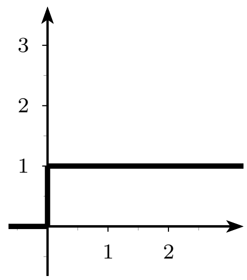
$$\begin{aligned}
\Lambda \star \Lambda(0) &= \int_{-1}^{1} \Lambda(x)\Lambda(-x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Lambda(x)^2 dx \\
&= 2\int_{0}^{1} (-x+1)^2 dx \\
&= 2\int_{0}^{1} 1 - 2x + x^2 dx \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

alors que la courbe passe à la hauteur 2.

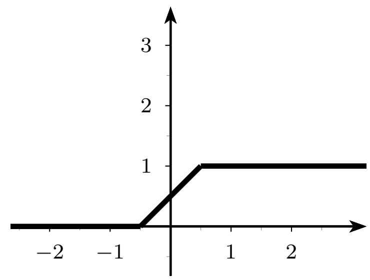
Par ailleurs, les fonctions sont continues donc le produit de convolution doit être dérivable ; or le résultat proposé n'est pas dérivable en -2 et 2.

3. 

$\star$



$=$



VRAI : le résultat est le produit de convolution de la porte par l'échelon. On peut le "deviner" en faisant glisser la porte par rapport à l'échelon : quand le centre de la porte est

— avant -0.5, la porte et l'échelon n'ont pas de valeur non nulle en commun, le produit de convolution est nul.

— entre -0.5 et 0.5, la porte "rentre" dans l'échelon ; elle en ressort quand son centre dépasse en 0.5. Entre les deux, l'aire en commun augmente linéairement.

— supérieure à 0.5, la porte est entièrement contenue dans l'échelon ; l'aire en commun est constante et égale à l'aire de la porte : 1.

On retrouve le résultat en posant le calcul intégral et en traitant les 3 cas.

Exercice 5 Soit la fonciton F définie par

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$$

En utilisant le produit de convolultion, retrouver la fonction f dont F est la tranformée de Laplace.

On peut écrire

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4} \times \frac{1}{p^2+1}$$

On reconnaît alors le produit des transformées de Laplace de $f_1(t) = \cos(2t)\mathcal{U}(t)$ et $f-2(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$.
Sachant que la transformée de Laplace du produit de convolution de 2 signaux est le produit des transformées de Laplace ; la transformée inverse de F est donc le produit de convolution des deux fonctions causales f_1 et f_2 :

$$\begin{aligned}
f(t) &= f_1 \star f_2(t) \\
&= \int_0^t \cos(2x)\sin(t-x)dx\mathcal{U}(t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-x+2x) + \sin(t-x-2x)dx\mathcal{U}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[-\cos(t+x) + \frac{1}{3}\cos(t-3x)\right]_0^t \mathcal{U}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos(2t) + \frac{1}{3}\cos(-2t) + \cos(t) - \frac{1}{3}\cos(t)\right)\mathcal{U}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos(2t) + \frac{1}{3}\cos(-2t) + \cos(t) - \frac{1}{3}\cos(t)\right)\mathcal{U}(t) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\cos(2t) + \frac{1}{3}\cos(t)\right)\mathcal{U}(t)
\end{aligned}$$