

Mathématiques - Devoir Surveillé n°2

Vendredi 20 novembre 2015 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = \cos(\sin(x))$.

1. Rappeler les $DL_4(0)$ de cosinus et sinus.
2. Montrer que le $DL_4(0)$ de f est $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\epsilon(x)$.
3. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
5. Déterminer la position relative de la tangente T par rapport à la courbe C_f au voisinage de 0.

Exercice 2 Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fautive en justifiant :

1. Soit f la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x}$. Le $DL_6(0)$ de f

- (a) ne comporte que des termes de degré pair,
- (b) commence par un 1,
- (c) n'est pas calculable

2. Soient les fonctions f et g dont les $DL_3(0)$ sont :

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

- (a) Le $DL_1(0)$ de $f \times g$ est $f(x)g(x) = 1 - 2x + x\epsilon(x)$
- (b) Le $DL_2(0)$ de $f \times g$ est $f(x)g(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$
- (c) Le $DL_3(0)$ de $f \times g$ n'est pas calculable.
- (d) Le $DL_4(0)$ de $f \times g$ n'est pas calculable.

3. Soit la fonction f dont le $DL_4(0)$ est $f(x) = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + x^4\epsilon(x)$.

(a) Le $DL_4(0)$ de f' est $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}x + x^3 + x^4\epsilon(x)$

(b) Soit F une primitive de f . Le $DL_5(0)$ de F est nécessairement $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{20}x^5 + x^5\epsilon(x)$

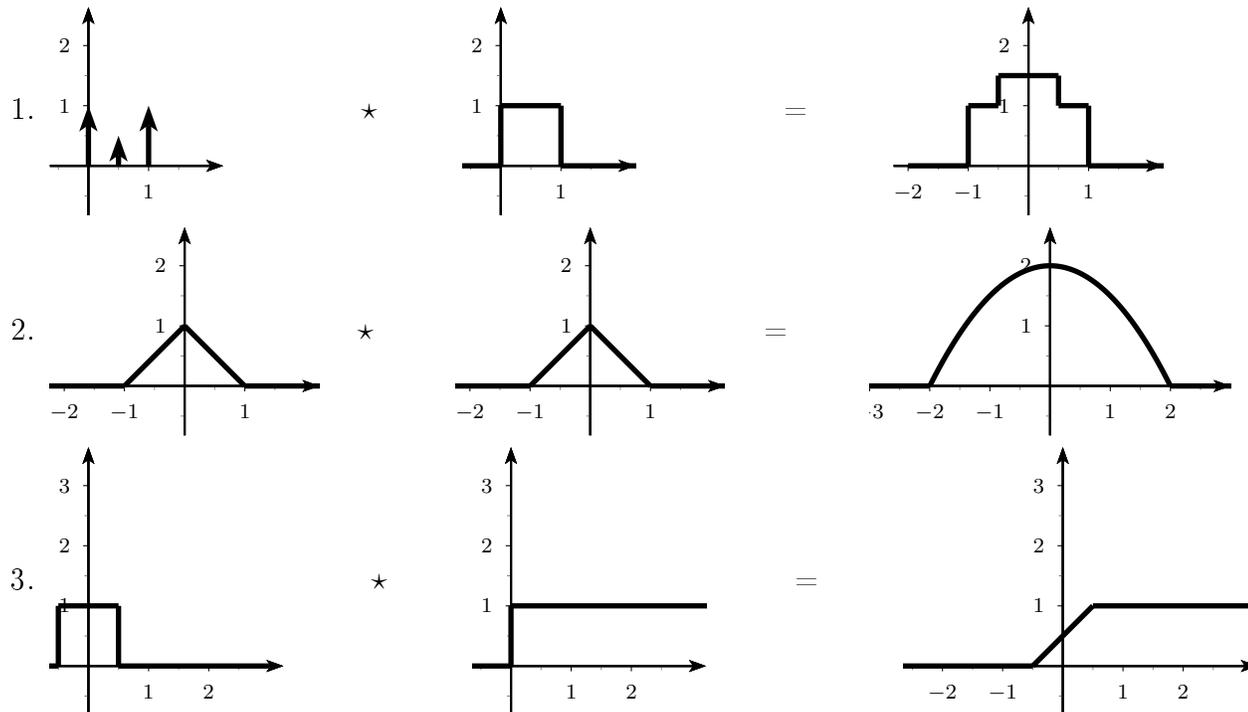
4. La limite de la fonction $f(x) = \frac{\sin(2x)\sin(3x)}{x^2}$ quand x tend vers 0 vaut

- (a) 0 (b) $+\infty$ (c) 6 (d) $\frac{1}{6}$

Exercice 3 Calculer $f \star g$:

1. $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (1-t)\mathcal{U}(t)$
2. $f(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$ et $g(t) = \Lambda(t+1)$
3. $f(t) = \delta(t+1) + 2\delta(t-1)$ et $g(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) - 3\delta(t-1)$

Exercice 4 Dire si les produits de convolution suivant sont vrais ou faux en justifiant :



Exercice 5 Soit la fonction F définie par

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)}$$

En utilisant le produit de convolution, retrouver la fonction f dont F est la transformée de Laplace.

Formulaire

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p^2}$

Fonction	Transformée de Laplace
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$