Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - Correction
Vendredi 1 octobre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt$.
   On coupe l'intégrale en deux :
$$I = \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} dt - \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} dt$$
   Or $\int_{-1}^{1} \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} dt = 0$ puisqu'on intègre une fonction impaire sur un intervale centré en 0. Donc
$$I = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{4} dt = -\frac{1}{4} \times 2 = -\frac{1}{2}$$

2. $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x)\cos(3t) dx$.
   On intègre par rapport à x, donc $\cos(3t)$ est une constante. Donc
$$J = \cos(3t) \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) dx = \cos(3t) \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\cos(3t)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(3t)$$

3. $K = \int_{1}^{e} x^3 \ln(x) dx$
   On fait une intégration par parties : On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^3$. On calcule alors que $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{4}x^4$. Donc
$$K = \left[\frac{1}{4}x^4 \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^4 \times \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \ln(x)\right]_1^e - \left[\frac{1}{16}x^4\right]_1^e = \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}$$

4. $L = \int_{0}^{1} \frac{2t^2 + 3t}{2t + 1} dt$
   On pose une division euclidienne et on peut montrer que $2t^2 + 3t = (2t + 1)(t + 1) - 1$ donc
$$L = \int_0^1 t + 1 - \frac{1}{2t+1} dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}\ln|2t+1|\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(3)$$

5. $M = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.
   Il suffit d'appliquer une formule de primitive puis de faire une limite en $+\infty$

$$M = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\ln(3)}^{3\ln(2)} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$.
On souhaite calculer I en posant le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$.

1. Exprimer x en fonction de u.

$$u = \sqrt{1+e^x} \Leftrightarrow u^2 = 1 + e^x \Leftrightarrow e^x = u^2 - 1 \Leftrightarrow x = \ln(u^2-1)$$

2. Quelles seront les bornes de l'intégrale I écrite en fonction de u ?

$$x = \ln(3) \Rightarrow u = \sqrt{1+e^{\ln(3)}} = \sqrt{1+3} = 2$$

   et

$$x = 3\ln(2) = \ln(8) \Rightarrow u = \sqrt{1+e^{\ln(8)}} = \sqrt{1+8} = 3$$

3. Quelle est la relation entre dx et du ?

$$x = \ln(u^2-1) \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{2u}{u^2-1}$$

4. Calculer I.
   Par changement de variable on a

$$I = \int_2^3 \frac{1}{u} \times \frac{2u}{u^2-1} du = \int_2^3 \frac{2}{u^2-1} du$$

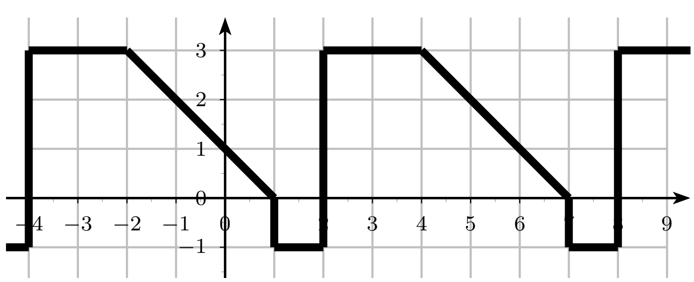
   On calcule alors l'intégrale en faisant une D.E.S :

$$I = \int_2^3 \frac{2}{(u-1)(u+1)} du = \int_2^3 \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} du = [\ln|u-1| - \ln|u+1|]_2^3$$

   Donc $I = \ln(2) - \ln(4) + \ln(3) = \ln(3) - \ln(2)$

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes.

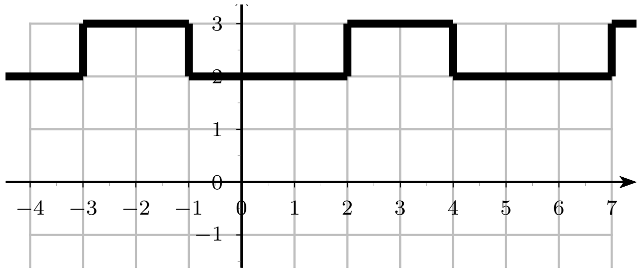
1. Calculer la valeur moyenne du signal suivant :



On rappelle que la valeur moyenne d'un signal de période T est $a_0 = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)dt$.

$$a_0 = \frac{1}{6} \times (6 + \frac{9}{2} - 1) = \frac{19}{12}$$

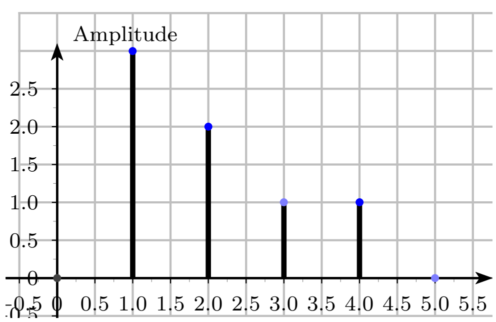
2. Calculer l'énergie moyenne du signal suivant :

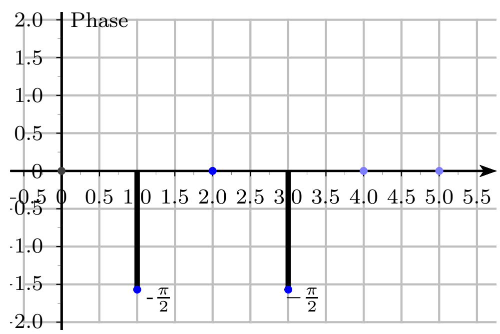


On rappelle que la valeur moyenne d'un signal de période T est $E = \frac{1}{T}\int_{[T]} (f(t))^2 dt$.

$$E = \frac{1}{5} \times (\int_{-1}^{2} 2^2 dt + \int_{2}^{4} 3^2 dt) = \frac{1}{5}(4 \times 3 + 2 \times 9) = 6$$

3. On considère les spectres d'amplitude et de phase (en fonction du sinus) d'un signal :





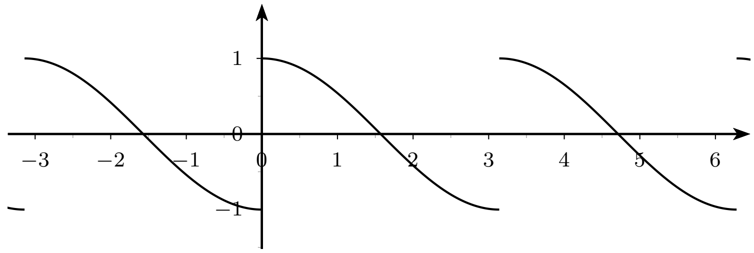
Répondre par vrai ou faux en justifiant.

(a) Le signal est pair.
FAUX
Le signal est composé de 4 harmoniques non nulles. Deux des harmoniques sont des sinus et les deux autres sont des sinus déphasés de $\frac{\pi}{2}$, donc des cosinus.

(b) L'énergie moyenne vaut 15.FAUX
On sait que $E = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{4}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2) = \frac{15}{2}$.

Exercice 4 Soit le signal π-périodique f défini par $f(t) = \cos(t)$ sur l'intervalle $]0; \pi[$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $]-\pi; 2\pi[$.



2. Montrer que $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

$$\begin{array}{rcl} \sin(a+b)+\sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \\ & = & \sin(a)\cos(b)+\sin(a)\cos(b) \\ & = & 2\sin(a)\cos(b) \end{array}$$

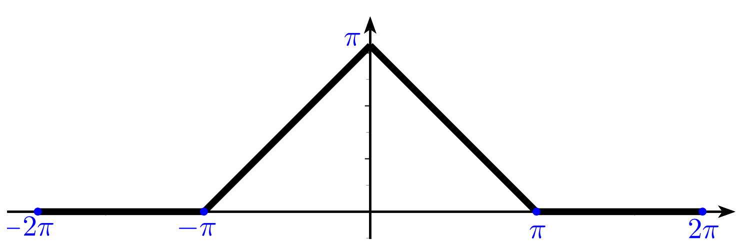
3. Montrer que $b_n = \dfrac{8n}{\pi(4n^2-1)}$.

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\sin(2nt)dt \\ & = & \dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2nt+t)+\sin(2nt-t)dt \\ & = & \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin((2n+1)t)+\sin((2n-1)t)dt \\ & = & \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{-1}{2n+1}\cos((2n+1)t)+\dfrac{-1}{2n-1}\cos((2n-1)t)\right]_0^{\pi} \\ & = & \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{-1}{2n+1}(-1-1)+\dfrac{-1}{2n-1}(-1-1)\right) \\ & = & \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n-1}\right) \\ & = & \dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{4n}{4n^2-1} \\ & = & \dfrac{8n}{\pi(4n^2-1)} \end{array}$$

4. Écrire la série de Fourier de f.
Comme la fonction est impaire, on a : $a_0 = 0$ et $a_n = 0$. Donc

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin(2nt)$$

Exercice 5 Soit f le signal 4π périodique dont la représentation sur $[-2\pi; 2\pi]$ est :



1. Déterminer la valeur moyenne du signal.
Graphiquement, on obtient $a_0 = \frac{\pi}{4}$.

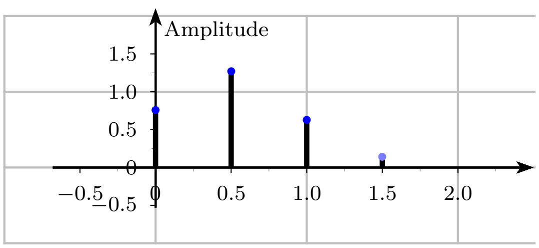
2. On admet que $a_n = \dfrac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$.
Tracer les spectres d'amplitude et de phase (par rapport au sinus) des 4 premières harmoniques de la série de Fourier de f.
La fonction est paire donc les coefficients b_n son nulss. On peut écrire la série de Fourier de f

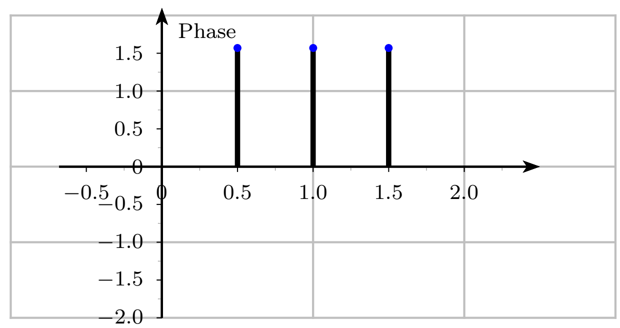
$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}nt\right)$$

On écrit les 4 premières harmoniques :

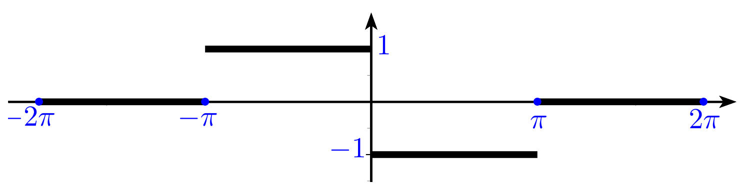
$$S_f(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{2}{\pi}\cos(t) + \frac{4}{9\pi}\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 0$$

Les spectres sont donc :





3. Déduire des questions précédentes les coefficients de Fourier du signal suivant :



On observe que la fonction est la dérivée de la fonciton f. Comme f est continue, on peut utiliser les propriétés suivantes : $b_n(f') = -n\omega a_n(f)$ et $a_n(f') = n\omega b_n(f)$. Donc :

$$b_n(f') = -n \times \frac{1}{2}\frac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{-2}{\pi n}\left(1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

et

$$a_n(f') = n \times \frac{1}{2} \times 0 = 0$$