Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Correction Devoir Surveillé 1
Vendredi 25 septembre 2020 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt$

$$I = \left[\frac{t^6}{24} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

2. $J = \displaystyle\int_0^\pi \cos(u)\sin(3u)du$

$$\cos(u)\sin(3u) = \frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2} \times \frac{e^{3iu}-e^{-3iu}}{2i} = \frac{e^{4iu}-e^{-2iu}+e^{2iu}-e^{-4iu}}{4i} = \frac{\sin(4u)}{2} + \frac{\sin(2u)}{2}$$

d'où

$$J = \int_0^\pi \frac{\sin(4u)}{2} + \frac{\sin(2u)}{2} du = \left[-\frac{\cos(4u)}{8} - \frac{\cos(2u)}{4}\right]_0^\pi = 0$$

3. $K = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)dt$

On a

$$K = \left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

On aurait également pû dire que la fonction $t \to \cos(t)\sin(t)$ est impaire et que l'on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0 d'où $K = 0$.

4. $L = \displaystyle\int_1^3 \frac{t^2+1}{\sqrt{t^3+3t}} dt$

$$\frac{t^2+1}{\sqrt{t^3+3t}} = \frac{1}{3}\frac{3t^2+3}{\sqrt{t^3+3t}} = \frac{1}{3}\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$$

avec $u(t) = t^3 + 3t$. Une primitive de $\dfrac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$ est $2\sqrt{u(t)}$.

On en déduit que

$$L = \left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3+3t}\right]_1^3 = \frac{8}{3}$$

5. $M = \displaystyle\int_4^5 \frac{2x-3}{x^2-x-6}dx$

   Pour calculer M, on effectue la DES de $\dfrac{2x-3}{x^2-x-6}$, en remarquant que $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$:
$$\frac{2x-3}{x^2-x-6} = \frac{2x-3}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{5}\frac{1}{x-3} + \frac{7}{5}\frac{1}{x+2}$$
   d'où
$$M = \left[\frac{3}{5}\ln(|x-3|) + \frac{7}{5}\ln(|x+3|)\right]_4^5 = \frac{3}{5}\ln(2) + \frac{7}{5}\ln\left(\frac{7}{6}\right)$$

6. $N = \displaystyle\int_0^{-1} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

   On remarque que x^2+2x+2 est irréductible ($\Delta < 0$). On écrit x^2+2x+2 sous forme canonique : $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ d'où
$$N = \int_0^{-1} \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = [\arctan(x+1)]_0^{-1} = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

7. $P = \displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx$

   On effectue une intégration par parties :

   $u'(x) = x \qquad u(x) = \dfrac{x^2}{2}$

   $v(x) = \ln(x) \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$

   d'où
$$P = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Exercice 2 Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale
$$Q = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)}dx$$
en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1. Montrer que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ implique $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $dt = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)dx$

   On a
$$\sin(x) = \sin\left(2\times\frac{x}{2}\right) = 2\times\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
   Or $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=1$, d'où :
$$\sin(x) = 2\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{1}$$
   Remarquons que

$$\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{2}$$

On déduit des équations (1) et (2) que

$$\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En remplaçant $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on obtient $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

2. Calculer Q en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

   On a

$$Q = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)} \times \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$$

$$Q = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2+2t} dt = 2\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt = 2\left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^1 = 1$$

Exercice 3 Donner une écriture de chacune des fonctions suivantes sans utiliser la fonction $\mathcal{U}$ puis dessiner leur courbe représentative.

1. $f_1(t) = 2\mathcal{U}(t+1) - 3\mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-3)$

   On trouve que

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq t < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

2. $f_2(t) = t\mathcal{U}(t) - (2t-4)\mathcal{U}(t-1) + (2t-4)\mathcal{U}(t-3)$

   On trouve que

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -t+4 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ t & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

3. $f_3(t) = e^t - e^t\mathcal{U}(t-1)$

   On trouve que

$$f_3(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

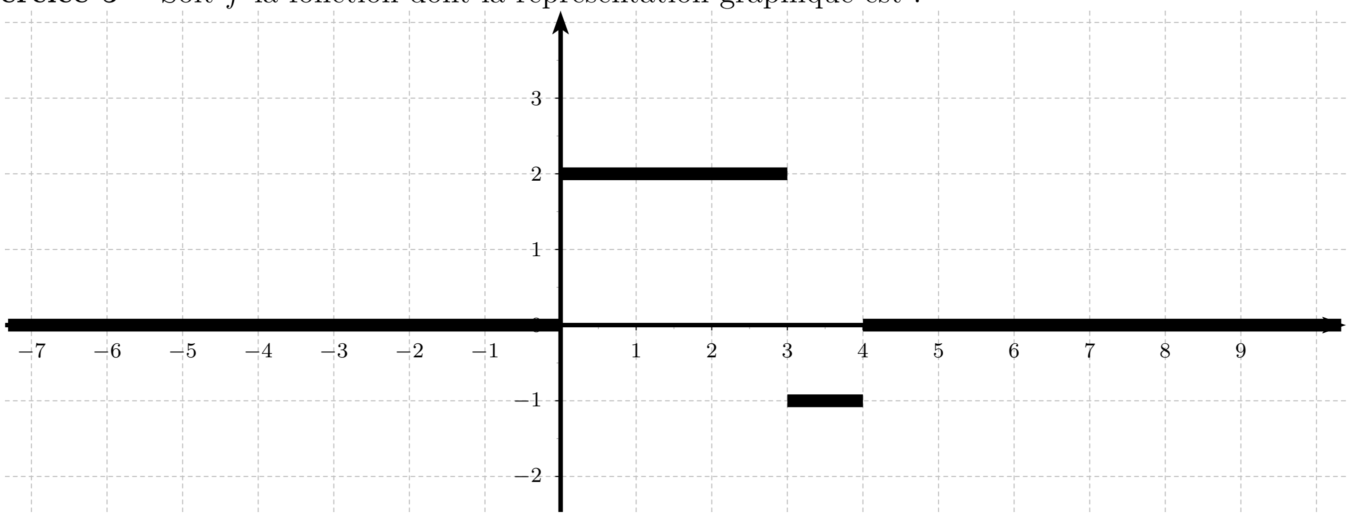
Exercice 4 Exprimer la fonction f suivante à l'aide de la fonction échelon $\mathcal{U}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ et } 1 \leq x < 3 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{3x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) = (x+1)(\mathcal{U}(x+1) - \mathcal{U}(x)) + \frac{3x}{2}(\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x-1)) + 3\mathcal{U}(x-3) \\ = (x+1)\mathcal{U}(x+1) + (\frac{x}{2} - 1)\mathcal{U}(x) - \frac{3x}{2}\mathcal{U}(x-1) + 3\mathcal{U}(x-3) \end{aligned}$$

Exercice 5 Soit f la fonction dont la représentation graphique est :



Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Laplace de f de 2 façons :

1. en revenant à la définition de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}_{f(t)}(p) = 2\int_0^3 e^{-pt}dt - \int_3^4 e^{-pt}dt = 2\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^3 - \left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_3^4 = -3\frac{e^{-3p}}{p} + \frac{2}{p} + \frac{e^{-4p}}{p}$$

2. en exprimant f à l'aide de la fonction échelon $\mathcal{U}(t)$
   En remarquant que

$$f(t) = 2(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-3)) - (\mathcal{U}(t-3) - \mathcal{U}(t-4)) = 2\mathcal{U}(t) - 3\mathcal{U}(t-3) + \mathcal{U}(t-4)$$

   on retrouve le résultat de la question précédente.

Exercice 6

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = \dfrac{t^4 + 2t^2 + 3t + 1}{5}\mathcal{U}(t)$

$$\mathcal{L}_{f_1(t)}(p) = \frac{24}{5} \times \frac{1}{p^5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{p^3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

2. $f_2(t) = e^{\sqrt{2}t+\ln(2)}\mathcal{U}(t) = 2e^{\sqrt{2}t}\mathcal{U}(t)$

$$\mathcal{L}_{f_2(t)}(p) = \frac{2}{p-\sqrt{2}}$$

3. $f_3(t) = \cos(\pi t)\mathcal{U}(t)$

$$\mathcal{L}_{f_3(t)}(p) = \frac{p}{p^2+\pi^2}$$

4. $f_4(t) = e^{-\pi t}\cos(\pi t)\mathcal{U}(t)$

$$\mathcal{L}_{f_4(t)}(p) = \mathcal{L}_{f_3(t)}(p+\pi) = \frac{p+\pi}{(p+\pi)^2+\pi^2}$$

5. $f_5(t) = \cos(\pi t)\mathcal{U}(t-2) = f_3(t-2)$
   d'où

$$\mathcal{L}_{f_5(t)}(p) = e^{-2p}\frac{p}{p^2+\pi^2}$$