Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Correction Devoir Surveillé 1
Vendredi 20 septembre 2019 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)dx$

   On linéarise : $\cos^2(x)\sin^2(x) = \dfrac{1}{8}(-\cos(4x)+1)$, d'où
   $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{8}(-\cos(4x)+1)dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$

2. $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{t\to 1}\int_t^2 \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{t\to 1}[\ln|\ln(x)|]_t^2 = \lim_{t\to 1}\ln|\ln(t)| - \ln|\ln(2)| = -\infty$

3. $K = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^4\tan^5(t)dt = 0$ car la fonction est impaire

4. $L = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)dx$

   On effectue une IPP : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$, d'où
   $$\int_0^1 \arctan(x)dx = [x\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

5. $M = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} - 1dt = \left[2\sqrt{t} - t\right]_0^1 = 1$

6. $N = \displaystyle\int_2^3 \frac{5x^2+21x+22}{(x+3)(x^2+2x-3)}dx$

   On a $\dfrac{5x^2+21x+22}{(x+3)(x^2+2x-3)} = \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{3}{x-1}$, d'où
   $$N = \left[2\ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + 3\ln|x-1|\right]_2^3 = 2\ln(6) + \frac{1}{6} + 3\ln(2) - 2\ln(5) - \frac{1}{5}$$

Exercice 2

1. *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction* $f(x) = \sin(2x) - 3\cos(3x)$.

   Par identification, on a $b_2 = 1$ et $a_3 = -3$ et tous les autres coefficients de Fourier sont nuls.

2. *Déterminer la série de Fourier de la fonction* $f(x) = \cos^3(x)$.

   On linéarise f : $f(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x))$ d'où $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$ et tous les autres coefficients sont nuls.

3. *On considère la fonction f impaire, 2π-périodique et vérifiant*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{pour } x = \pi \end{cases}.$$

   (a) *Tracer la fonction sur l'intervalle* $[-2\pi; 2\pi]$.

   (b) *Déterminer les coefficients de Fourier de* f.

   La fonction f est impaire donc on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculons b_n :

$$b_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^\pi \sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = -\frac{2(\cos(n\pi) - 1)}{n\pi}$$
$$= \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

   (c) *Pour quelles valeurs de t a-t-on $S_f(t) = f(t)$ (où S_f est la série de Fourier de f) ?*

   D'après le théorème de Dirichlet, on a $S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$. En tous les points où la fonction est continue, $f(t^+) = f(t^-)$. On a donc $S_f(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

   Au point π, on a $\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = f(\pi)$, on a donc également $f(\pi) = S_f(\pi)$. Comme la fonction est impaire et 2π-périodique, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $S_f(t) = f(t)$.

   (d) *En déduire la valeur de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   On a $S_f(t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nt)$. Au point $\frac{\pi}{2}$,

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p\geq 0} \frac{4}{(2k+1)\pi}(-1)^p =$$

   Or

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

   et

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

   d'où

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p\geq 0} \frac{4}{(2k+1)\pi}(-1)^p = \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2k+1)}$$

   D'après Dirichlet, on a $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, d'où

$$\frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2k+1)} = 1 \Leftrightarrow \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$$

(e) Tracer les 5 premières harmoniques du spectre de f.

Exercice 3

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x)=\pi-|x|$.

1. *Représenter la fonction f sur $[-3\pi;3\pi]$.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*
   La fonction f est paire, d'où $b_n=0$ pour tout $n\geq 1$. De plus,
   $$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^\pi f(t)dt=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2}$$
   et pour $n\geq 1$, on a :
   $$a_n=\frac{4}{2\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)\cos(nt)dt$$
   On effectue une IPP :
   $$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi-t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi+\int_0^\pi\frac{\sin(nt)}{n}dt\right)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi=\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}$$
3. *Calculer l'énergie moyenne du signal.*
   $$E(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-|x|)^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-x)^2dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{(\pi-x)^3}{3}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{3}$$
4. *En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.*
   D'après le théorème de Parseval, on a (les b_n étant nuls)
   $$a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}a_n^2=E(f)$$
   D'après la question 2., on a
   $$a_n=\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}=\begin{cases}0 & \text{si } n=2p\\ \dfrac{4}{(2p+1)^2\pi} & \text{si } n=2p+1\end{cases}$$
   On en déduit :
   $$\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{p\geq 0}\frac{16}{(2p+1)^4\pi^2}=\frac{\pi^2}{3}\Leftrightarrow\frac{8}{\pi^2}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^2}{12}\Leftrightarrow\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$