

# Mathématiques - Devoir Surveillé 1

## Vendredi 28 septembre 2018 - Durée : 1h30

*Tous documents et appareils électroniques sont interdits.*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

**Question de cours :** Soit  $f$  une fonction périodique de période  $T$ . Donner l'expression des coefficients de Fourier exponentiels de  $f$ .

**Exercice 1** Soit  $f$  la fonction paire et périodique de période  $2\pi$  telle que

$$f(t) = t^2 \text{ pour } t \in [0, \pi]$$

1. Représenter  $f$  sur l'intervalle  $[-4\pi; 4\pi]$ .
2. Calculer la valeur moyenne  $a_0(f)$  du signal  $f$ .
3. (a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques  $a_n(f')$  et  $b_n(f')$  de  $f'$ .  
 (b) En déduire que  $a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Que vaut  $b_n(f)$  ?
4. Déterminer la série de Fourier de  $f$ , notée  $S_f(t)$ .
5. (a) Énoncer le théorème de Dirichlet.  
 (b) Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .
6. (a) Énoncer le théorème de Bessel-Parseval.  
 (b) Calculer  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt$ .  
 (c) En déduire que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

**Exercice 2** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Tracer le spectre de phase et le spectre d'amplitude du signal suivant :

$$s(t) = 1 - 2 \cos(100\pi t) + \sqrt{3} \cos(200\pi t) + \sin(200\pi t) + 4 \sin(300\pi t)$$

2. On connaît les coefficients de Fourier exponentiels d'un signal  $f$  :

$$c_n(f) = \frac{e-1}{1-2in\pi} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$ .

3. Soit  $f$  la fonction périodique de période  $2\pi$  et impaire tel que  $f(t) = t$  pour  $t \in ]0, \pi[$  et  $f(\pi) = 0$ .  
 (a) Représenter  $f$  sur l'intervalle  $[-4\pi; 4\pi]$ .

(b) On admet que  $a_0(f) = 0$ ,  $a_n(f) = 0$  et  $b_n(f) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction  $g$  périodique de période  $2\pi$  telle que  $g(t) = t - \pi$  pour  $t \in ]0, 2\pi[$  et  $g(2\pi) = 0$ .

**Exercice 3** Calculer les intégrales suivantes :

1.  $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) dx$

2.  $J = \int_1^2 x \ln(x) dx$

3.  $K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2 \sin^5(t) dt$

4.  $L = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx$

5.  $M = \int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin^2(x) dx$  (on pourra poser  $u = \sin(x)$ )

6.  $N = \int_1^e \frac{2y^6+3}{y^5+7} dz$