Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 29 septembre 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Questions de cours :

1. Énoncer l'identité de Parseval.
2. Montrer que, si $g(t) = f(t - \tau)$ alors $c_n(g) = e^{-in\omega\tau} c_n(f)$.

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$ (ou pourra poser $u = \cos(x)$).
2. $J = \displaystyle\int_0^{1} (1 - t)\sin(n\pi t) dt$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
3. $K = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\sin(3t) dt$,
4. $L = \displaystyle\int_0^{1} \frac{2x^3 + 5x^2}{2x^2 + 3x - 2} dx$

Exercice 2

1. Soit le signal f, 2π-périodique, défini sur $[0; 2\pi[$ par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in [0; \pi] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]\pi; 2\pi[\end{cases}$$

   (a) Représenter f sur $[-2\pi; 2\pi]$.
   (b) Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
   (c) Écrire la série de Fourier de f
2. On considère la fonction périodique définie par $g(t) = f(-t)$.
   (a) Représenter g sur $[-2\pi; 2\pi]$.
   (b) Sans calculer ses coefficients, écrire la série de Fourier de g
3. On considère la fonction périodique définie par $h(t) = g(t) + f(t)$.
   (a) Représenter h sur $[-2\pi; 2\pi]$.
   (b) Montrer que la série de Fourier de h est

$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt)$$

(c) En remplaçant t par 0 dans l'expression de Fourier de h, déterminer la valeur de la limite de la série convergente suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

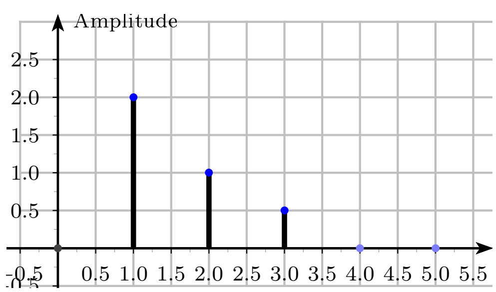
Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes

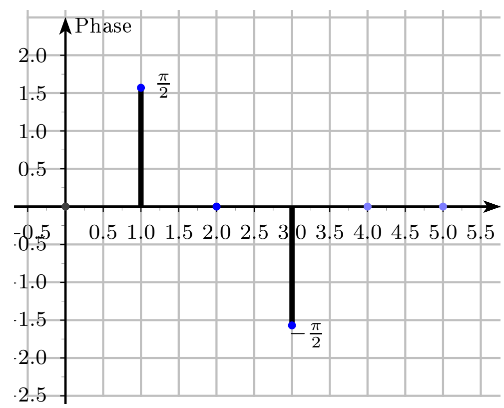
1. Soit le signal suivant :

$$f(t) = 2\cos(50\pi t) - \cos(100\pi t) + \sin(100\pi t) - 3\sin(200\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(300\pi t) + \frac{1}{4}\sin(300\pi t)$$

Tracer le spectre d'amplitude du signal.

2. On considère les spectres d'amplitudes et de phases (par rapport au cosinus), tracé en fonction des pulsations, suivants :





Donner un exemple de fonction dont les spectres correspondent aux spectres ci-dessus.

3. Déterminer une fonction 2π-périodique dont les coefficients de Fourier vérifient :

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 2 \qquad b_1 = -1 \qquad a_3 = 4$$

4. On connaît les coefficients de Fourier exponentiels d'un signal f :

$$c_n = \frac{1}{2i\pi n} \times e^{in\frac{\pi}{2}}$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

5. On considère une fonction périodique dont la série de Fourier est

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1+2n^2)}\cos(nt)$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(f')$ et $b_n(f')$ de la dérivée de f.