Nom :
Prénom :
Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 30 septembre 2016 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx$,
   Pour calculer I_1, on effectue une IPP :
   $u(x) = x, \quad v'(x) = \cos(n\pi x)$,
   $u'(x) = 1, \quad v(x) = \dfrac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$.
   On obtient :
   $$I_1 = \left[x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx = \left[\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_0^1 = \frac{\cos(n\pi)-1}{(n\pi)^2} = \frac{(-1)^n-1}{(n\pi)^2}.$$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\tan(t)e^{2t\cos(t)}}{\ln(t)}dx = 2\pi\frac{\tan(t)e^{2t\cos(t)}}{\ln(t)}$: la variable d'intégration est en x et la fonction dans l'intégrale dépend de t (c'est donc une constante !).
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin(nt)dt$. On linéarise en utilisant la formule suivante :
   $$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)).$$
   On obtient
   $$I_3 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos\left(t/2-nt\right)-\cos(t/2+nt)\right)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(t/2-nt)}{1/2-n} - \frac{\sin(t/2+nt)}{1/2+n}\right]_0^{\pi}$$
   $$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\pi/2-n\pi)}{1/2-n} - \frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{1/2+n}\right) = \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{1/2-n} - \frac{1}{1/2+n}\right) = \frac{(-1)^n n}{1/4-n^2}.$$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^u}du$ en posant $x = e^u$. On a $dx = e^u du$, d'où :
   $$I_4 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^u}du = \int_0^1 \frac{e^u}{e^u(1+e^u)}du = \int_1^e \frac{1}{x(1+x)}dx = \int_1^e \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}dx$$
   $$= \left[\ln(|x|) - \ln(|1+x|)\right]_1^e = \ln(2) + 1 - \ln(1+e).$$

Exercice 2

On considère la fonction g impaire et périodique de période 2π suivante :

$$g(t) = t(\pi - t) \text{ si } 0 \leq t \leq \pi.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g) = \frac{4}{n^3\pi}(1-(-1)^n)$.

Les questions 1., 2. et 3. peuvent se traiter de manière indépendante.

1. Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de g.

   D'après le cours, on a $a_n(g) = 2\mathfrak{Re}(c_n(g))$ et $b_n(g) = -2\mathfrak{Im}(c_n(g))$, d'où $c_n(g) = -\frac{2i}{n^3\pi}(1-(-1)^n)$.

2. (a) Ecrire la série de Fourier associée à g.

   On a

$$S_g(t) = a_0(g) + \sum_{n\geq 1}(a_n(g)\cos(nt) + b_n(g)\sin(nt)) = \sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^3\pi}(1-(-1)^n)\sin(nt).$$

   (b) En quel point $t \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de g converge-t-elle vers $g(t)$?

   La fonction g est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de Dirichlet, on a $S_g(t) = g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (c) En prenant $t = \frac{\pi}{2}$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

   On a $S_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^3\pi}(1-(-1)^n)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Or :

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ lorsque } n = 2k, \\ (-1)^k \text{ lorsque } n = 2k+1. \end{cases}$$

   Les harmoniques paires sont donc nulles. On ne garde que les harmoniques impaires dans la somme (c'est-à-dire les n qui s'écrivent sous la forme $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$) :

$$S_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k\geq 0}\frac{4}{(2k+1)^3\pi}\left(1-(-1)^{2k+1}\right)(-1)^k = \sum_{k\geq 0}\frac{8(-1)^k}{(2k+1)^3\pi}.$$

   De plus, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. D'où d'après le théorème de Dirichlet (les hypothèses sont vérifiées, confère la question précédente) :

$$\sum_{k\geq 0}\frac{8(-1)^k}{(2k+1)^3\pi} = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3. (a) Enoncer le théorème de Bessel-Parseval en rappelant les hypothèses.

   Voir le cours.

   (b) Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2 dt$.

   Remarquons que la fonction $|g(t)|^2$ est paire puisque la fonction g est impaire. On a donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|g(t)|^2dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^2(\pi-t)^2dt.$$

Développons $t^2(\pi-t)^2$:

$$t^2(\pi-t)^2 = t^2(\pi^2+t^2-2\pi t) = t^2\pi^2+t^4-2\pi t^3.$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^2\pi^2+t^4-2\pi t^3dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3\pi^2}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{2\pi t^4}{4}\right]_0^{\pi} = \pi^4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^4}{30}.$$

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

D'après le théorème de Bessel-Parseval, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2dt = a_0^2(g)+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}a_n(g)^2+b_n(g)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi^4}{30} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{4^2}{n^6\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)^2.$$

Or :

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0 \text{ lorsque } n=2k, \\ 2 \text{ lorsque } n=2k+1. \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{\pi^4}{30} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{4^2}{n^6\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)^2$$

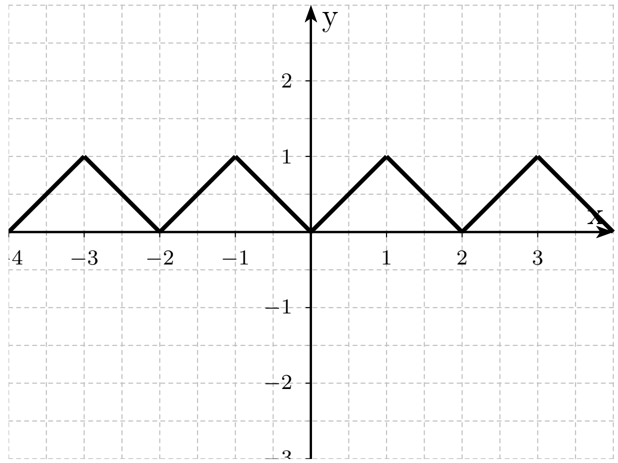
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi^4}{30} = \frac{32}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi^6}{960} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^6}.$$

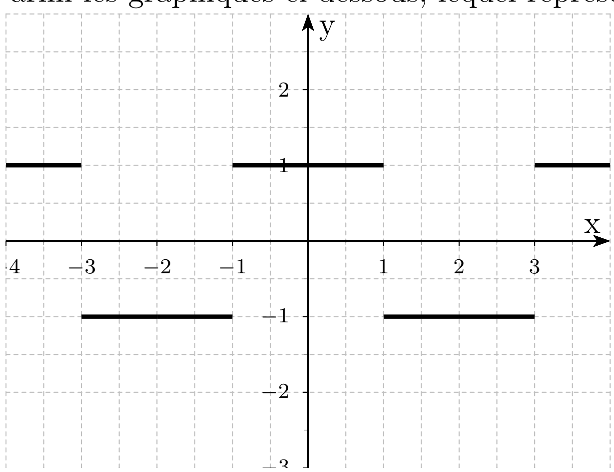
Exercice 3 Le but de l'exercice est de calculer les coefficients trigonométriques de la fonction paire et périodique de période 2 suivante :

$$f(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq 1.$$

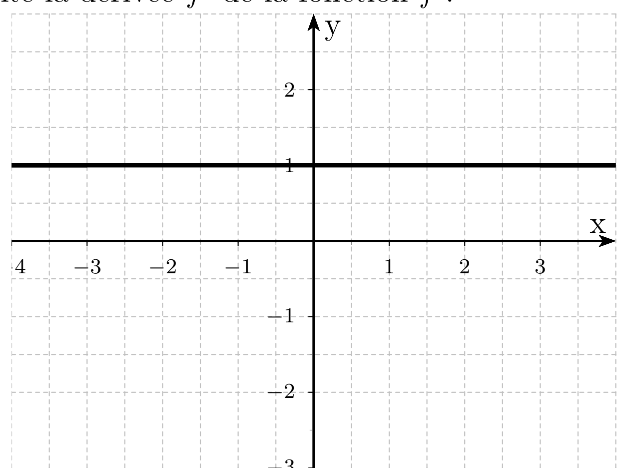
1. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique ci-dessous.



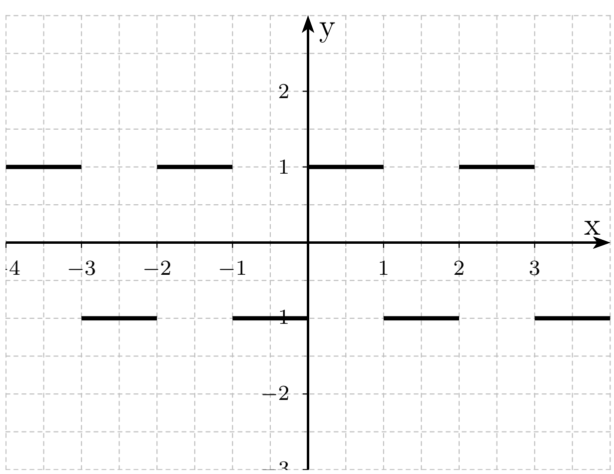
2. Parmi les graphiques ci-dessous, lequel représente la dérivée f' de la fonction f ?



(a)



(b)



(c)

Le graphe correspondant à f' est le graphe (c).

3. Calculer les coefficients de Fourier de f'.
La fonction f' est impaire donc $a_0(f') = a_n(f') = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$b_n(f') = \frac{4}{2}\int_0^1 f'(t)\sin(n\pi t)dt = 2\int_0^1 \sin(n\pi t)dt = 2\left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

4. En déduire les coefficients de Fourier de f. Le résultat obtenu est-il cohérent avec la réponse obtenue en 1) de l'exercice 1 ?
   La fonction f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc d'après le cours, on a :

   $$a_n(f') = n\pi b_n(f) \text{ et } b_n(f') = -n\pi a_n(f).$$

   On en déduit que $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = -\dfrac{b_n(f')}{n\pi} = 2\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   D'après le cours, la formule de $a_n(f) = \dfrac{4}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)dt = 2\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt$. Or d'après la question 1. de l'exercice 1, on a $\displaystyle\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$.
   Cela est cohérent avec le calcul précédent.