

Nom :
Prénom :
Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1

Vendredi 30 septembre 2016 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les intégrales suivantes :

$$1. I_1 = \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx,$$

$$3. I_3 = \int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) dt,$$

$$2. I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\tan(t) e^{2t \cos(t)}}{\ln(t)} dx,$$

$$4. I_4 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^u} du \text{ en posant } x = e^u.$$

Exercice 2

On considère la fonction g impaire et périodique de période 2π suivante :

$$g(t) = t(\pi - t) \text{ si } 0 \leq t \leq \pi.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g) = \frac{4}{n^3\pi} (1 - (-1)^n)$.

Les questions 1., 2. et 3. peuvent se traiter de manière indépendante.

1. Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de g .

2. (a) Ecrire la série de Fourier associée à g .

(b) En quel point $t \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de g converge-t-elle vers $g(t)$?

(c) En prenant $t = \frac{\pi}{2}$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

3. (a) Énoncer le théorème de Bessel-Parseval en rappelant les hypothèses.

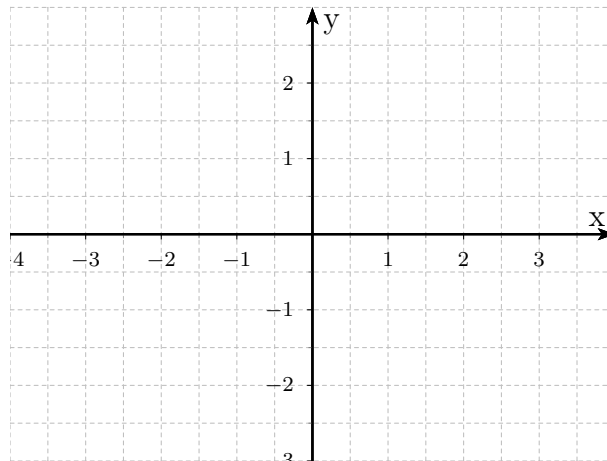
(b) Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt$.

(c) En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

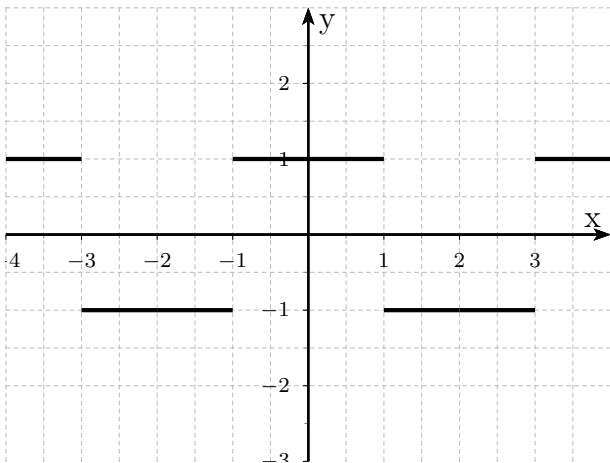
Exercice 3 Le but de l'exercice est de calculer les coefficients trigonométriques de la fonction paire et périodique de période 2 suivante :

$$f(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq 1.$$

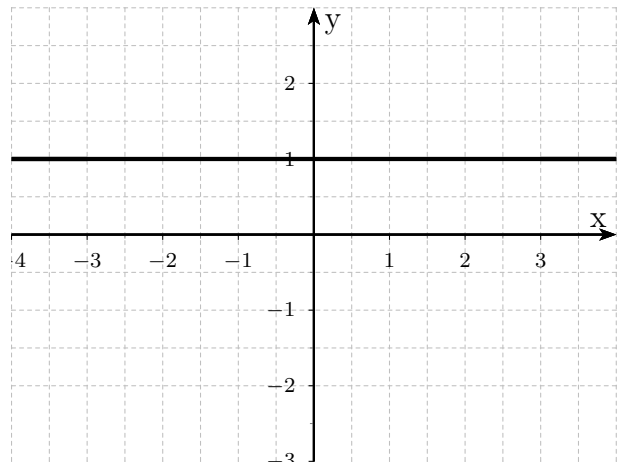
1. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique ci-dessous.



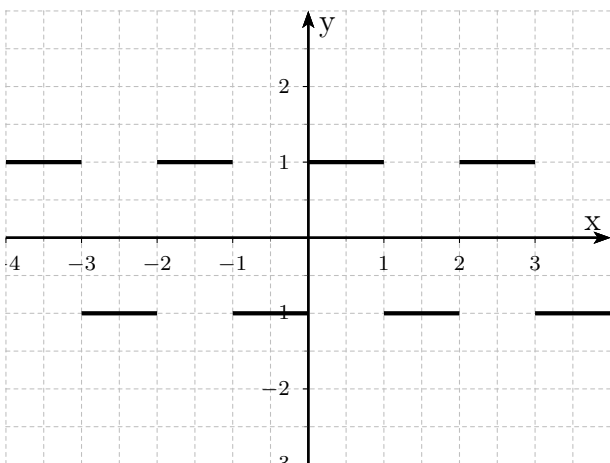
2. Parmi les graphiques ci-dessous, lequel représente la dérivée f' de la fonction f ?



(a)



(b)



(c)

3. Calculer les coefficients de Fourier de f' .

4. En déduire les coefficients de Fourier de f . Le résultat obtenu est-il cohérent avec la réponse obtenue en 1) de l'exercice 1 ?