Mathématiques - Correction du devoir Surveillé 1

Exercice 1

1. On effectue une IPP avec :

$$u(t) = t, \qquad u'(t) = 1,$$
$$v'(t) = \sin(3t), \qquad v(t) = -\frac{\cos(3t)}{3}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{t\cos(3t)}{3}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{-\cos(3t)}{3} dt \\ &= \frac{2\pi}{9} + \left[\frac{\sin(3t)}{9}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\ &= \frac{2\pi}{9}. \end{aligned}$$

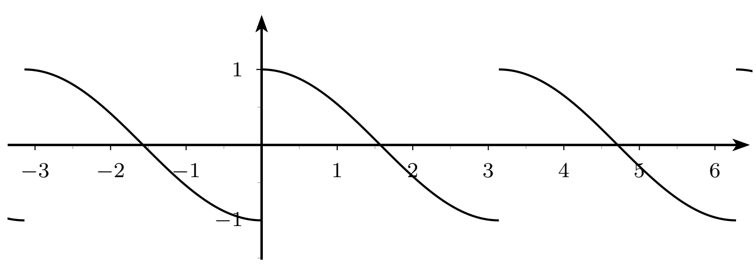
2. On effectue le le changement de variable $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$. On obtient :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \\ &= [\arctan(u)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit le signal π-périodique f défini par $f(t) = \cos(t)$ sur l'intervalle $]0;\pi[$.

1. La courbe représentative de f est



2. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à 0. La fonction est donc impaire.
3. D'après le cours, on a

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \tag{1}$$

et

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a). \tag{2}$$

En additionnant (1) et (2), on obtient :

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b). \tag{3}$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par définition, on a $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(t)\sin(2nt)dt$. Or d'après (3) avec $a=2nt$ et $b=t$, on a

$$\cos(t)\sin(2nt)=\frac{1}{2}\left(\sin(2nt+t)+\sin(2nt-t)\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2nt+t)+\sin(2nt-t)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(2nt+t)}{2n+1}+\frac{-\cos(2nt-t)}{2n-1}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(2n\pi+\pi)}{2n+1}+\frac{-\cos(2n\pi-\pi)}{2n-1}+\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{2n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+2n}+\frac{2}{2n-1}\right)\\
&= \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}
\end{aligned}$$

5. La fonction f est impaire donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=0$. On en déduit que la série de Fourier de f est :

$$S_f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin(2nt).$$

6. L'énergie moyenne du signal f est donnée par

$$E(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(t)dt.$$

Or $\cos^2(t)=\dfrac{\cos(2t)+1}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned}
E(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(2t)+1dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(2t)}{2}+t\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

7. D'après la formule de Bessel-Parseval, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8^2n^2}{\pi^2(4n^2-1)^2}\\
\Leftrightarrow\quad 1 &= \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}\\
\Leftrightarrow\quad \frac{\pi^2}{64} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. $a_0 = c_0 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2((-1)^n - 1)}{1 + 2in} + \frac{2((-1)^{-n} - 1)}{1 - 2in}.$$
Or $(-1)^{-n} = (-1)^n$, d'où
$$\begin{aligned} a_n &= 2((-1)^n - 1)\left(\frac{1}{1+2in} + \frac{1}{1-2in}\right) \\ &= 2((-1)^n - 1)\left(\frac{1 - 2in + 1 + 2in}{(1+2in)(1-2in)}\right) \\ &= \frac{4((-1)^n - 1)}{1 + 4n^2}. \end{aligned}$$
De même, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{aligned} b_n &= i(c_n - c_{-n}) \\ &= \frac{8n((-1)^n - 1)}{1 + 4n^2} \end{aligned}$$
2. La réponse correcte est la réponse (b).
3. La première et la troisième harmonique ne sont pas en phase, le signal est donc une somme de cosinus et de sinus. Cela implique que le signal n'est ni pair ni impair.
4. D'après Bessel-Parseval, l'énergie moyenne de f vaut :
$$1^2 + \frac{1}{2}\left(2^2 + 1^2 + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{29}{8}.$$
5. La valeur moyenne de f est :
$$a_0 = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^3 3dt + \int_3^4 (-1)dt\right) = \frac{1}{4}(3 \times 3 - 1) = 2.$$
L'énergie moyenne de f est :
$$\frac{1}{4}\int_0^4 f^2(t)dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^3 3^2dt + \int_3^4 (-1)^2dt\right) = \frac{28}{4} = 7.$$

Exercice 4

1. FAUX car $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2+1}}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+1-x^2} = e$.
2. FAUX car $x^2 + x + 1 \underset{0}{\sim} 1$ et $\lim_{x\to 0} x^3 + x = 0$.
3. FAUX car d'après la définition du nombre dérivé de la fonction sinus en $\dfrac{\pi}{2}$, on a que $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\sin(x) - 1}{x - \pi/2} = \lim\limits_{x\to+\pi/2} \dfrac{\sin(x) - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} = \cos(\pi/2) = 0$.