Mathématiques - Devoir Surveillé nř1
Vendredi 9 octobre 2015 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} t \sin(3t)\, \mathrm{d}t$,
2. $J = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} \mathrm{d}x$ (on pourra faire le changement de variable $u = \sin(x)$).

Exercice 2

Soit le signal π-périodique f défini par $f(t) = \cos(t)$ sur l'intervalle $]0;\pi[$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $]-\pi;2\pi[$.
2. Justifier que f est impaire.
3. Montrer que $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.
4. Montrer que $b_n = \dfrac{8n}{\pi(4n^2-1)}$.
5. Écrire la série de Fourier de f.
6. Calculer l'énergie moyenne du signal.
7. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

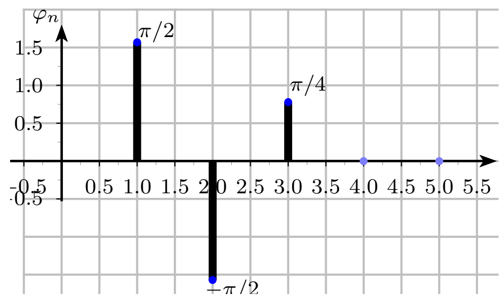
Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit f une fonction 4π-périodique telle que les coefficients exponentiels sont

$$c_n = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{1+2in}$$

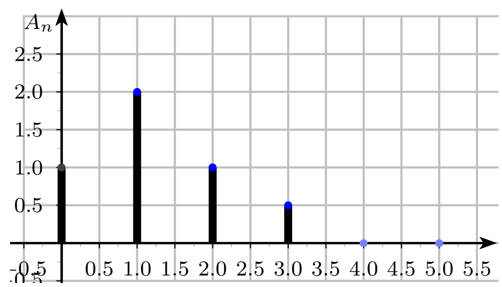
   Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Soit f une fonction paire. Parmi les affirmations suivantes, dire celle qui est vraie :
   (a) c_n est un imaginaire pur.
   (b) c_n est un réel pur.
   (c) c_n est pair.
   (d) ni (a), ni (b), ni (c) et donc (d)

3. Soit f une fonction dont le spectre de phase est :



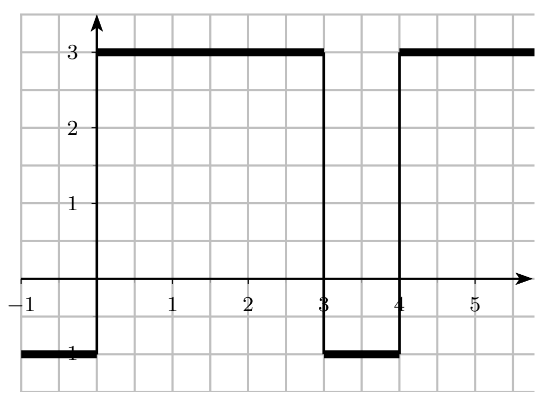
   La fonction est elle paire, impaire ou ni l'une ni lautre ?

4. Soit f une fonction de valeur moyenne 1, dont le spectre d'amplitude est :



   Déterminer la valeur exacte de l'énergie moyenne de f.

5. Soit f la fonction 4-périodique définie par :



   Déterminer la valeur moyenne de f et la valeur de l'énergie moyenne de f.

Exercice 4

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. $e^{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^2}$.
2. $x^2 + x + 1 \underset{0}{\sim} x^3 + x$.
3. $\sin(x) - 1 \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} x - \dfrac{\pi}{2}$.