Mathématiques - Devoir Surveillé n°1
Vendredi 26 septembre 2014 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculons les intégrales suivantes :

1. On calcule I à l'aide d'une intégration par parties (en posant $u(x) = 1-3x$ et $v'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$) :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-3x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[(1-3x)\times 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -3\times 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= (1-\pi) - 0 + 6\left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 1-\pi-12\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-1\right) \\ &= 13-\pi-6\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Pour calculer J on linéarise la fonction trigonométrique grâce à la formule $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1-\cos(2x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3. Il n'est pas nécessaire de faire un changement de variable pour calculer K (mais si on le souhaite on peut poser $u = \sin(x)$), il suffit de voir que la fonction à intégrer est de la forme $\dfrac{u'}{u}$:

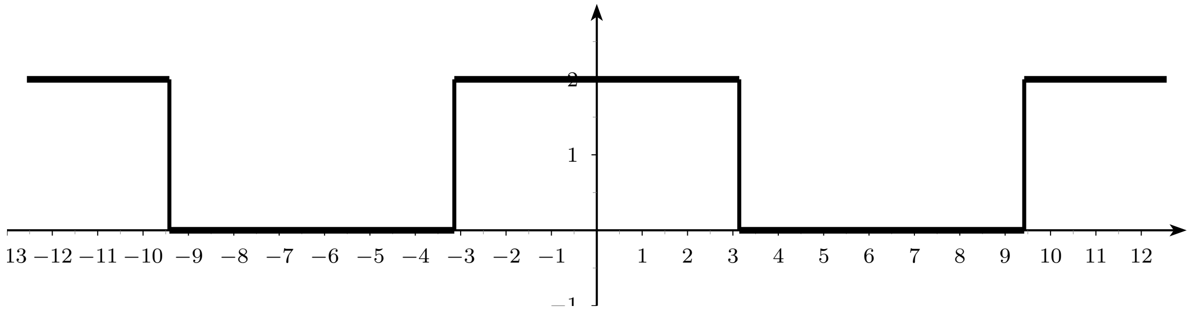
$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1}\mathrm{d}x \\ &= [\ln|\sin(x)+1|]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f la fonction périodique de période 4π définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-2\pi; -\pi[, \\ a \text{ si } t \in [-\pi; \pi], \\ 0 \text{ si } t \in]\pi; 2\pi[. \end{cases} \quad (1)$$

1. Pour $a = 2$, la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-4\pi; 4\pi[$ est



2. Calculons les coefficients de Fourier de f :
La valeur moyenne $a_0 = \dfrac{a}{2}$ (ça se voit... et on peut le retrouver en calculant l'air du rectangle !).
Les coefficients b_n sont tous nuls car la fonction est paire.
Pour calculer les coefficients a_n, on peut utiliser le fait que f est paire :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\cos(n\omega t)dt \\ &= \frac{2}{4\pi} \times 2\int_0^{\pi} a\cos(n\omega t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{a}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{a}{n\omega\pi}\sin(n\omega\pi) \end{aligned}$$

or $\omega = \dfrac{1}{2}$ donc $a_n = \dfrac{2a}{n\pi}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2a}{(2p+1)\pi}(-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$.

3. La série de Fourier de f s'écrit

$$S_f(t) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{t}{2}\right)$$

On peut réécrire cette fonction en remarquant que tous les termes pairs de la somme sont nuls :

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \frac{a}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2a}{(2p+1)\pi}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)\cos\left((2p+1)\frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{a}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2a}{(2p+1)\pi}(-1)^p\cos\left((2p+1)\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

4. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet. En particuler pour $t = 0$ on obtient : $S_f(0) = f(0) = a$ et donc

$$\frac{a}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2a}{(2p+1)\pi}(-1)^p\cos(0) = a$$

soit en réarangeant l'écriture :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

5. La fonction g définie ci-dessous s'obtient à partir de la fonction f en appliquant un retard de π :

$$g(t) = \begin{cases} a \text{ si } t \in [0; 2\pi], \\ 0 \text{ si } t \in]2\pi; 4\pi[. \end{cases} = f(t-\pi) \tag{2}$$

On applique le retard à la série de Fourier de f et obtient ainsi la série de Fourier de g :

$$S_g(t) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(n\frac{t-\pi}{2}\right)$$

On duplique le cosinus :

$$S_g(t) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \left(\cos\left(n\frac{t}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{t}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

En remarquant que pour tout n : $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \times \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on simplifie et on obtient :

$$S_g(t) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{n\pi} \sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(n\frac{t}{2}\right)$$

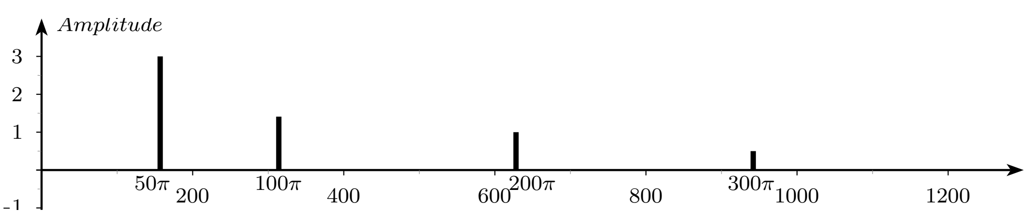
On identifie les coefficients de Fourier de g :

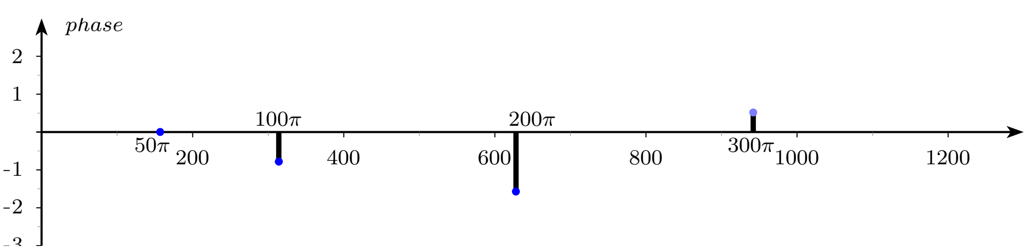
$$a_0 = \frac{a}{2}; \qquad a_n = 0 \quad \forall n \geq 1; \qquad b_n = \frac{2a}{n\pi}\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2a}{(2p+1)\pi} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$

Exercice 3 On réécrit les harmoniques du signal :

$$f(t) = 3\cos(50\pi t) + \sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(300\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

On trace les spectres d'amplitude et de phase du signal en fonction des pulsations :





Exercice 4 Q.C.M.

Pour chacune des questions suivantes, dire quelles sont les affirmations vraies et les affirmations fausses (1 point par réponse correcte et complète, -0,5 par réponse incorrecte). On ne demande pas de justifier.

1. Les coefficients de Fourier exponentiels vérifient :

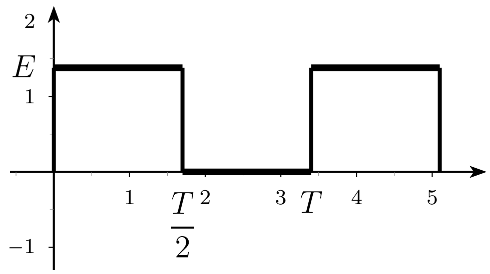
   (a) les c_n sont nuls si f est paire. **FAUX**

   (b) les c_n sont nuls si f est impaire. **FAUX**

   (c) les c_n ne sont jamais tous nuls. **FAUX**

   (d) les c_n sont nuls si et seulement f est nulle. **VRAI**

2. Les coefficients de Fourier du signal suivant vérifient :

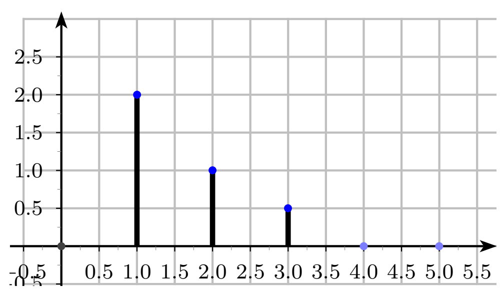


   (a) $a_0 = E$. **FAUX**

   (b) $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. **VRAI**

   (c) $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. **FAUX**

3. Ce spectre d'amplitude tracé en fonction des pulsations :



   peut être celui de :

   (a) $f(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(3x)$ **FAUX**

   (b) $g(x) = 2\cos(2x) + \sin(4x) + \frac{1}{2}\cos(6x)$ **FAUX**

   (c) $h(x) = 2\cos(x) + \cos(2x) + \sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(3x)$ **FAUX**

   (d) $k(x) = \cos(x) + \sin(x) + \sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(3x)$ **FAUX**