Mathématiques - Devoir Surveillé n°1
Vendredi 26 septembre 2014 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-3x)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$,
2. $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x$,
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1}\mathrm{d}x$ (on pourra faire un changement de variable).

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f la fonction périodique de période 4π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-2\pi; -\pi[, \\ a \text{ si } x \in [-\pi; \pi], \\ 0 \text{ si } x \in]\pi; 2\pi[. \end{cases} \tag{1}$$

1. On suppose dans cette question que $a = 2$. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-4\pi; 4\pi[$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la série de Fourier de f.
4. En utilisant le théorème de Dirichlet pour une valeur de t judicieusement choisie montrer que :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$
5. Déduire de ce qui précède les coefficients de Fourier de la fonction périodique de période 4π définie par :
$$g(x) = \begin{cases} a \text{ si } x \in [0; 2\pi], \\ 0 \text{ si } x \in]2\pi; 4\pi[. \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 3 Soit le signal suivant :

$$f(t) = 3\cos(50\pi t) + \cos(100\pi t) - \sin(100\pi t) - \sin(200\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(300\pi t) + \frac{1}{4}\sin(300\pi t)$$

Tracer les spectres d'ampitude et de phase du signal.

Exercice 4 Q.C.M.

Pour chacune des questions suivantes, dire quelles sont les affirmations vraies et les affirmations fausses (1 point par réponse correcte et complète, -0,5 par réponse incorrecte). On ne demande pas de justifier.

1. Les coefficients de Fourier exponentiels vérifient :

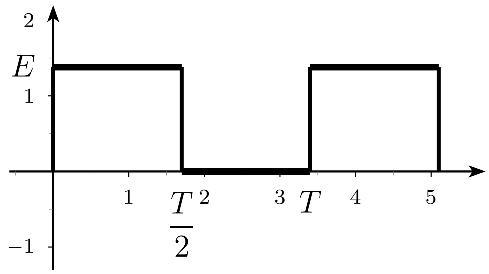
   (a) les c_n sont nuls si f est paire.

   (b) les c_n sont nuls si f est impaire.

   (c) les c_n ne sont jamais tous nuls.

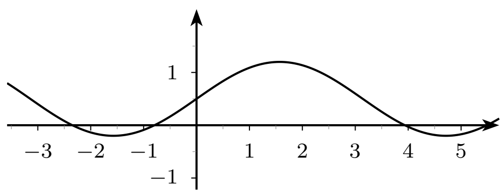
   (d) les c_n sont nuls si et seulement f est nulle.

2. Les coefficients de Fourier du signal suivant vérifient :



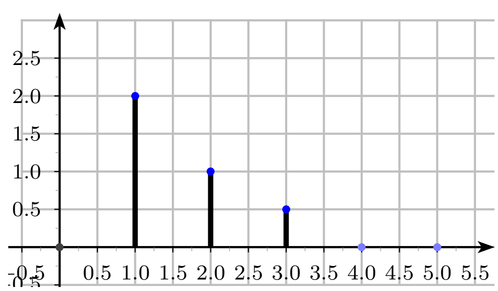
   (a) $a_0 = E$ (b) $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. (c) $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

3. la valeur moyenne du signal suivant est :



   (a) $a_0 = 0$ (b) $a_0 = 1$ (c) $a_0 = 1/2$ (d) $a_0 = -1/2$

4. Ce spectre d'amplitude tracé en fonction des pulsations :



   peut être celui de :

   (a) $f(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(3x)$

   (b) $g(x) = 2\cos(2x) + \sin(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(6x)$

   (c) $h(x) = 2\cos(x) + \cos(2x) + \sin(2x) + \dfrac{1}{2}\cos(3x)$

   (d) $k(x) = \cos(x) + \sin(x) + \sin(2x) + \dfrac{1}{2}\cos(3x)$