Mathématiques

Semestre 2

Cours de Mathématiques appliquées

Année 2022-2023

Nom :
Prénom :
Groupe :

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.
N. Brissard

Table des matières

Chapitre 1

Fonction réciproque

1.1 Bijection

Définition (ENSEMBLE IMAGE).
Soit f une fonction définie sur D_f. Soit $I \subseteq D_f$. On note $f(I)$ *l'ensemble image* de I par f défini par :

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in I, f(x) = y\}$$

Exemple. Si on considère $f(x) = x^2$, alors :

- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$
- $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$
- $f([1, 4[) = [1, 16[$
- $f(]-2, 3]) = [0, 9]$

Remarque. La notation $f : \begin{cases} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ signifie que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_-$, que les images de f sont dans $\mathbb{R}_+$ et que $f(x) = x^2$.

Définition (FONCTION INJECTIVE).
Soit $f : D_f \to E$ une fonction définie sur D_f et à valeurs dans E. On dit que f est :

- *injective* de D_f dans E si et seulement si pour tout y dans E il existe **au plus un** antécédent de y par f. Ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_1, x_2) \in D_f^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Exemple.

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ est injective.

En effet, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}_+$ et $x_2 \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \ \text{ ou } \ x_1 = -x_2$$

or comme x_1 et x_2 sont positifs, on a forcément $x_1 = x_2$.

Définition (Fonction surjective =).
Soit $f : D_f \to E$ une fonction définie sur D_f et à valeurs dans E. On dit que f est :

- *surjective* de D_f dans E si et seulement si pour tout y dans E il existe **au moins un** antécédent de y par f. Ce qui s'écrit encore :

$$\forall y \in E, \quad \exists x \in D_f \ \text{ tel que } \ f(x) = y$$

Exemple.
La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \ x^2 \end{cases}$ est surjective.
En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$, ce qui signifie que $\sqrt{y}$ est un antécédent de y par f.

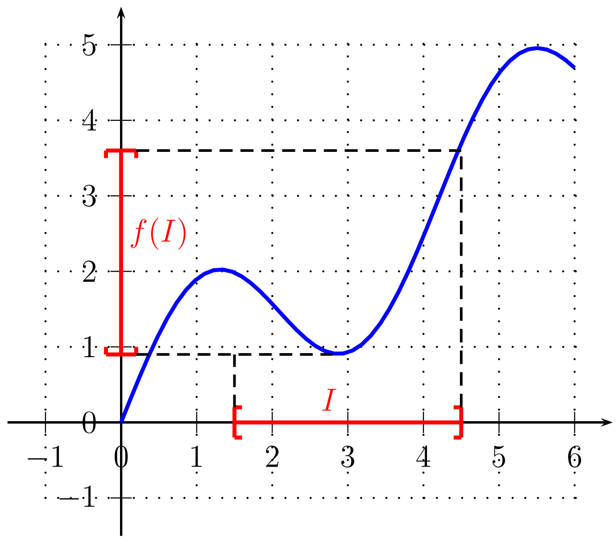
Définition (Fonction bijective).
Soit $f : D_f \to E$ une fonction définie sur D_f et à valeurs dans E. On dit que f est :

- *bijective* de D_f dans E si et seulement si elle est injective **et** surjective de D_f dans E. Dans ce cas, pour tout y dans E il existe **exactement un** antécédent de y par f.

Exemple.
La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \ \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \ x^2 \end{cases}$ est surjective.
En reprenant les deux raisonnements précédents, on a bien que f est injective et surjective.

Remarque. On remarque que le caractère injectif, surjectif et bijectif d'une fonction dépend autant de son expression que des ensembles de définition et ensemble image !

Théorème (des valeurs intermédiaires (TVI)).
Soit I un intervalle et soit f un fonction continue sur I. Alors $f(I)$, l'ensemble image de I par f, est un intervalle.



Théorème.
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$f(a) \times f(b) < 0$$

L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarques.
1. Il n'y a pas forcément unicité de la solution
2. La réciproque est fausse

Théorème.
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Si f est strictement monotone sur I alors f est bijective de I dans $f(I)$.

Exemple.
Soit $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.
La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. On a

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 2[$ et sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

Comme $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$,
on a $f(]2, +\infty[) =]1, +\infty[$, et on en déduit que

$$f \text{ est bijective de }]2, +\infty[\text{ dans }]1, +\infty[$$

On montre de même que

$$f \text{ est bijective de }]-\infty, 2[\text{ dans }]1, +\infty[$$

1.2 Fonction réciproque

Définition (Fonction réciproque).
Soit f une fonction bijective de D dans E. On appelle *fonction réciproque* de f, la fonction, notée f^{-1}, définie de E dans D par :

$$\forall x \in E, \quad f^{-1}(x) = b \Leftrightarrow f(b) = x$$

Ceci signifie que f^{-1} est la fonction qui donne l'antécédent de x par f (cet antécédent est unique puisque f est supposée bijective).

Exemples.

1. $f(x) = e^x$ est définie et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$, donc $f^{-1}(x) = \ln(x)$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^2$ est définie et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x^2} = |x| = x$, donc $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Remarque.
Attention a ne pas confondre la fonction réciproque de f, notée $f^{-1}(x)$, et l'inverse de $f(x)$, noté $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

Méthode
Pour déterminer l'expression de la fonction réciproque f^{-1}, il faut trouver x tel que $f(x) = y$.
L'expression de x sera alors donnée en fonction de y.
Cette expression est la fonction $f^{-1}(y)$.

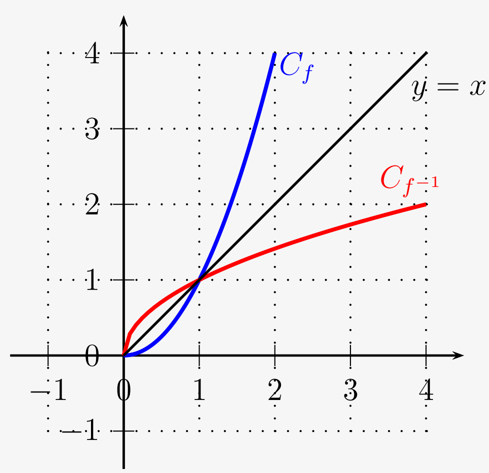
Exemple.
Soit $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ avec $x \in]2, +\infty]$.
On a vu dans l'exemple 5 que f est bijective de $]2, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$. Soit $y \in]1, +\infty[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = y \\ &\Leftrightarrow x - 1 = y(x-2) = xy - 2y \\ &\Leftrightarrow x - xy = 1 - 2y \quad \text{(on isole les termes avec des } x \text{ à gauche et les termes sans } x \text{ à droite)} \\ &\Leftrightarrow x(1-y) = 1 - 2y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1-2y}{1-y} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{1-y}$ sur $]1, +\infty[$.

Théorème.
Soit f une fonction bijective de D dans E. Alors :

1. *$\forall x \in D$, $f^{-1} \circ f(x) = x$.*
2. *$\forall x \in E$, $f \circ f^{-1}(x) = x$.*
3. *$\forall \in D$, $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.*
4. *Les courbes représentative des fonctions f et f^{-1}, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, sont la symétrie l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $x = y$.*



Si de plus la fonction f est dérivable et que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, alors f^{-1} est dérivable sur E et pour tout $x \in E$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

Remarque.
Les points 1. et 2. permettent de montrer qu'une fonction g est la réciproque de f.

Exemple.
Soient $f(x) = x^2 + 2x + 2$ définie sur $]-1, +\infty[$ et $g(x) = \sqrt{x-1} - 1$ définie sur $]1, +\infty[$.

f est définie et dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = 2x + 2 > 0$, donc f est strictement croissante, elle est donc bijective de $]-1, +\infty[$ dans $f(]-1, +\infty[) =]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$g \circ f = \sqrt{f(x) - 1} - 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 1 = \sqrt{(x+1)^2} - 1 = |x + 1| - 1 = x$$

Donc, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $g(x) = f^{-1}(x)$.

1.3 Arccos - Arcsin - Arctan

Définition (Fonction Arccos).
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

On appelle *Arccos* la fonction réciproque de f.

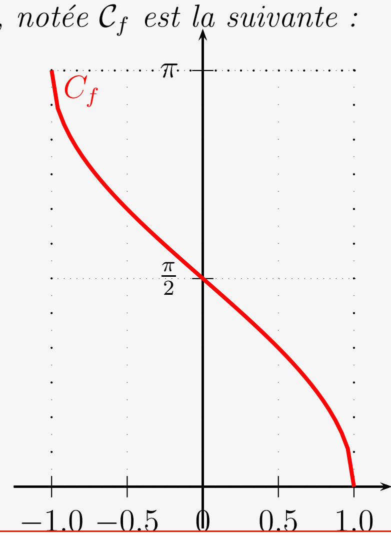
Théorème (Propriétés de la fonction Arccos).
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \mathrm{Arccos}(x) \end{aligned}$$

- *La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- *La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est la suivante :*



Démonstration.
La fonction cos est dérivable sur $[0, \pi]$ et sa dérivée $(-\sin)$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$. La fonction Arccos est donc dérivable sur $\cos(]0, \pi[) =]-1, 1[$ et sa dérivée est donnée par la formule :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

On a alors :

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))}$$

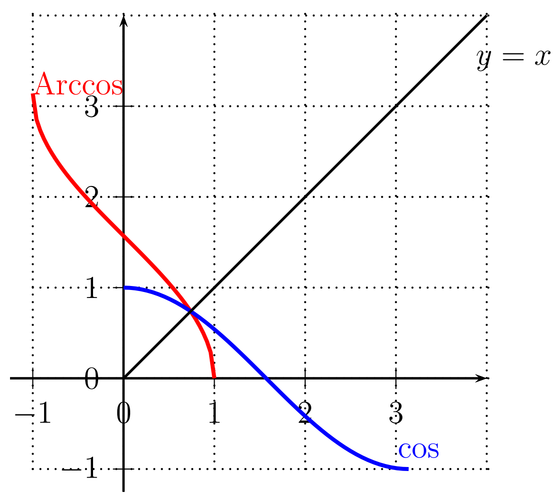
Grâce à la formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\text{Arccos}(x)) + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 &\Leftrightarrow x^2 + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 \\
&\Leftrightarrow \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 - x^2 > 0 \ \text{ puique } x \in]-1, 1[\\
&\Leftrightarrow \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La courbe représentative de Arccos est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de cos par rapport à la droite $y = x$.

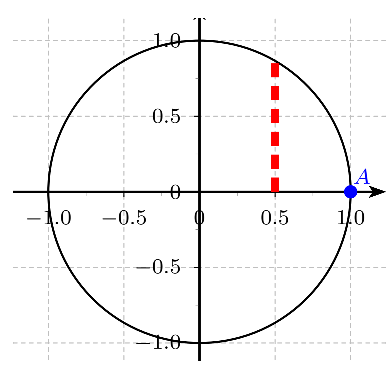


$\square$

Méthode : Pour déterminer la valeur de Arccos(x), on se pose la question : *Quel est l'angle de* $[0, \pi]$ *dont le cosinus vaut x ?*

Exemple.

$Arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ = "Quel est l'angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$?" $= \frac{\pi}{3}$



Définition (Fonction Arcsin).
Soit f la fonction définie par :

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \sin(x)$$

On appelle *Arcsin* la fonction réciproque de f.

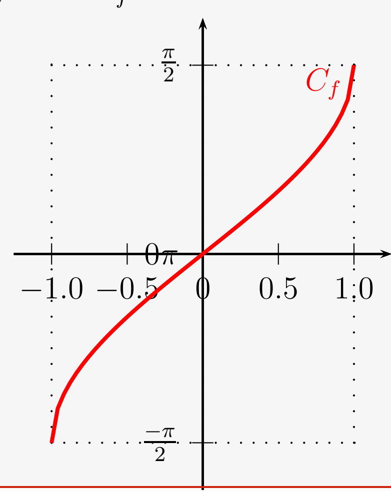
Théorème (Propriétés de la fonction Arcsin).
Soit f la fonction définie par :

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(x)$$

- *La fonction f est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$,*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- *La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est la suivante :*



Démonstration.
La fonction sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée (cos) ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction Arcsin est donc dérivable sur $\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1, 1[$ et de la même manière que pour Arccos, on a :

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin}(x))}$$

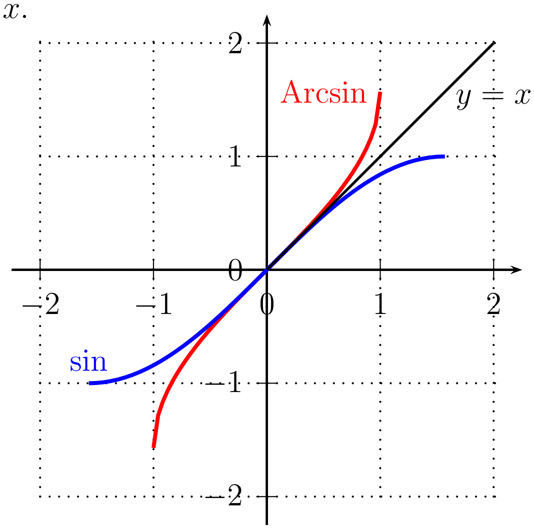
De plus

$$\begin{aligned}\cos^2(\text{Arcsin}(x)) + \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 &\Leftrightarrow \cos^2(\text{Arcsin}(x)) + x^2 = 1\\ &\Leftrightarrow \cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - x^2 > 0 \ \text{ puique } x \in]-1,1[\\ &\Leftrightarrow \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La courbe représentative de Arcsin est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de sin par rapport à la droite $y = x$.

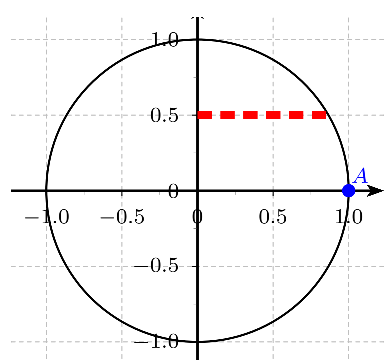


□

Méthode
Pour déterminer la valeur de Arcsin(x), on se pose la question : *Quel est l'angle de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *dont le sinus vaut* x *?*

Exemple.

$Arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ = "Quel est l'angle de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut $\frac{1}{2}$?" $= \frac{\pi}{6}$



Définition (Fonction Arctan).
Soit f la fonction définie par :

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \tan(x)$$

On appelle *Arctan* la fonction réciproque de f.

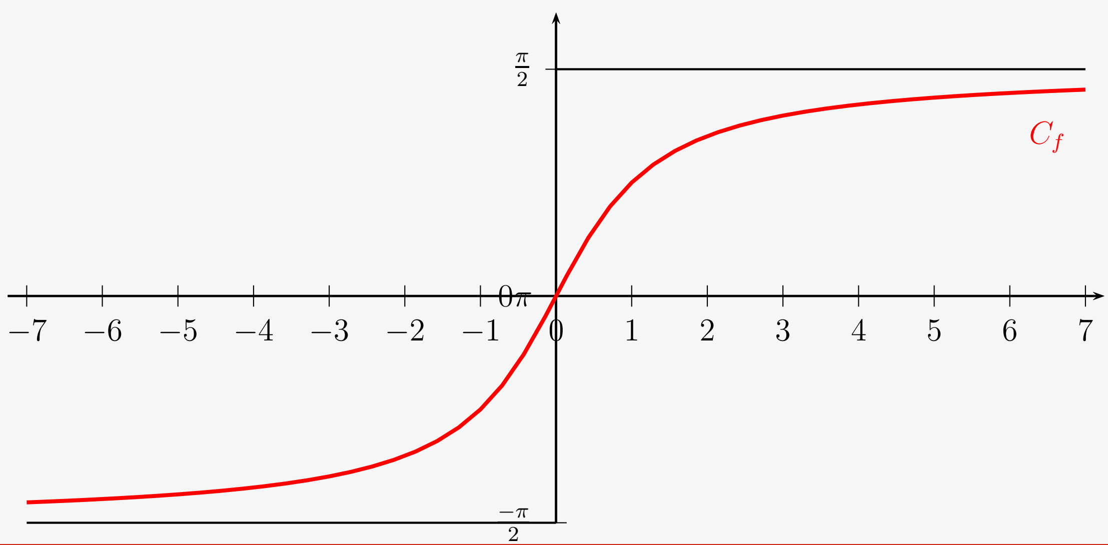
Théorème (Propriétés de la fonction Arctan).
Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \longmapsto \text{Arctan}(x)$$

- *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

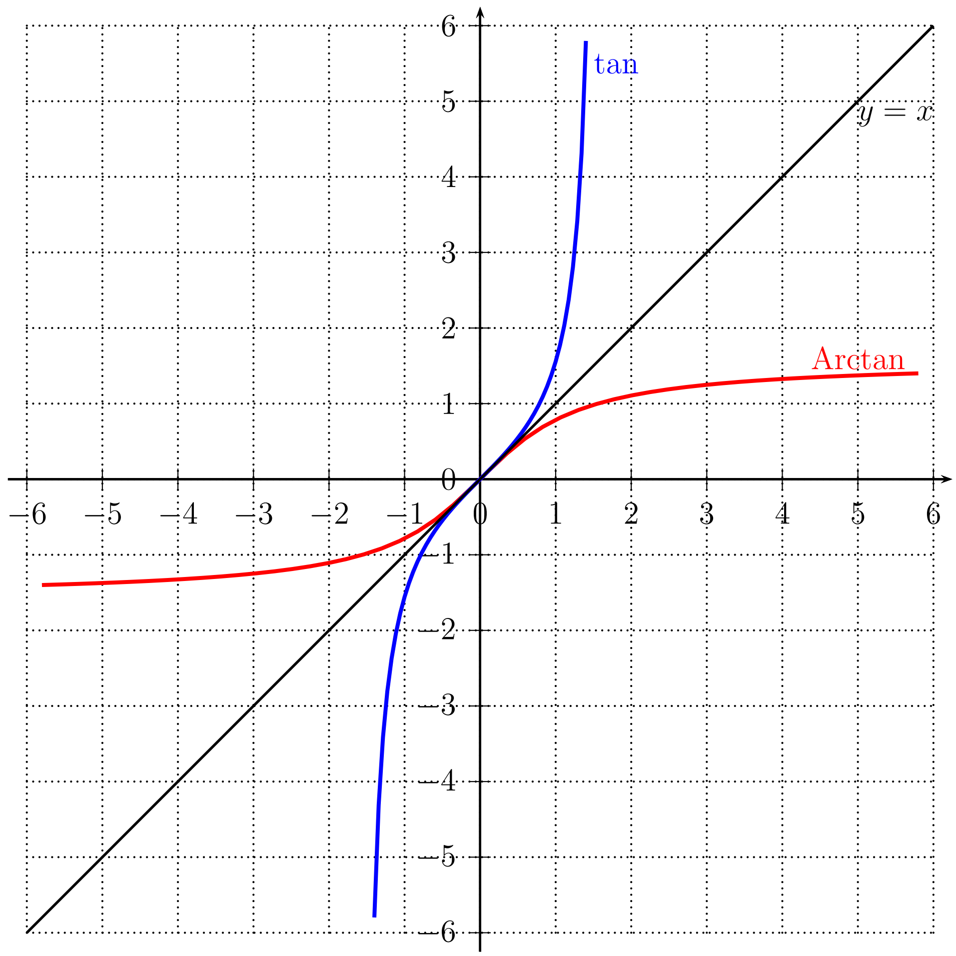
- *La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est la suivante :*



Démonstration.
La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée $(1+\tan^2)$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction Arctan est donc dérivable sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$ et de la même manière que précédemment,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

La courbe représentative de Arctan est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de tan par rapport à la droite $y = x$.

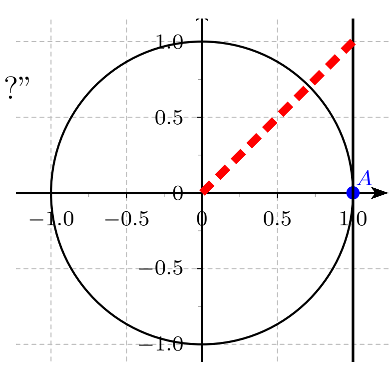


□

Méthode

Pour déterminer la valeur de Arctan(x), on se pose la question : *Quel est l'angle de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *dont la tangente vaut* x *?*

Exemple.



$$\begin{aligned} \arctan(1) &= \text{Quel est l'angle de } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ dont la tangente vaut } 1\,?\text{''} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Chapitre 2

Systèmes linéaires et matrices

2.1 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet de mettre n'importe quel système d'équations sous la forme d'un système triangulaire, c'est à dire sous la forme :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ \qquad b_2y + c_2z & = & d_2 \\ \qquad\qquad c_3z & = & d_3 \end{cases}$$

Les systèmes triangulaires sont particulièrement simples à résoudre !

Exemple.

$$\begin{cases} 3x + y - z & = & 2 \\ \quad 2y + z & = & 1 \\ \qquad 3z & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 1 & = & 2 \\ \quad 2y + 1 & = & 1 \\ \qquad z & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 0 & = & 3 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{cases}$$

2.1.1 Résoudre un système à 2 équations et 2 inconnues avec la méthode de Gauss

On cherche à résoudre par la méthode de Gauss un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x + \ y & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 2 \end{cases}$$

On commence par multiplier l'équation (1) par 3 et l'équation (2) par 2. Le système devient :

$$\begin{cases} 2x + \ y & = & 1 & (1) \\ 3x + 2y & = & 2 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y & = & 3 & (1') = 3 \times (1) \\ 6x + 4y & = & 4 & (2') = 2 \times (2) \end{cases}$$

Puis on soustrait $(1')$ à $(2')$, on obtient :

$$\begin{cases} 2x + y & = & 1 & (1) \\ y & = & 1 & (2'') = (2') - (1') \end{cases}$$

On obtient alors y, qu'on peut ensuite replacer dans l'équation (1) pour déterminer x.

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

2.1.2 Résoudre un système à 3 équations et 3 inconnues avec la méthode de Gauss

On cherche à résoudre par la méthode de Gauss un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ -4x + 3y - z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 2 \end{cases}$$

On commence par multiplier (1) par -4 et (2) par 2. Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} 2x - y + z & = & 2 & (1) \\ -4x + 3y - z & = & 2 & (2) \\ 1x - y + z & = & 1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 4y - 4z & = & -8 & (1_a) = -4 \times (1) \\ -8x + 6y - 2z & = & 4 & (2_a) = 2 \times (2) \\ 1x - y + z & = & 1 & (3) \end{cases}$$

On soustrait ensuite (1_a) à (2_a), on obtient :

$$\begin{cases} 2x - y + z & = & 2 & (1) \\ 2y + 2z & = & 12 & (2') = (2_a) - (1_a) \\ 1x - y + z & = & 1 & (3) \end{cases}$$

On recommence ensuite ces deux étapes mais cette fois en regardant les équations (1) et (3). On multiplie (1) par 1 et (3) par 2. On a :

$$\begin{cases} 2x - y + z & = & 2 & (1_b) = 1 \times (1) \\ 2y + 2z & = & 12 & (2') = (2_a) - (1_a) \\ 2x - 2y + 2z & = & 2 & (3_b) = 2 \times (3) \end{cases}$$

Puis on soustrait (1_b) à (3_b), on obtient finalement :

$$\begin{cases} 2x - y + z & = & 2 \quad (1) \\ 2y + 2z & = & 12 \quad (2') \\ -y + z & = & 0 \quad (3') = (3_b) - (1_b) \end{cases}$$

On remarque alors que les équations $(2')$ et $(3')$ forment un système à 2 équations et 2 inconnues (y et z). On peut alors appliquer la méthode précédente pour déterminer z puis y. Enfin, en replaçant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve x.

$$\begin{cases} 2x - y + z & = & 2 \quad (1) \\ {\color{red}2}y + 2z & = & 12 \quad (2') \\ {\color{blue}-1}y + z & = & 0 \quad (3') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z & = & 2 \quad (1) \\ -2y - 2z & = & -12 \quad (2'') = {\color{blue}-1} \times (2') \\ -2y + 2z & = & 0 \quad (3'') = {\color{red}2} \times (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z & = & 2 \quad (1) \\ 2y + 2z & = & 12 \quad (2') \\ 4z & = & 12 \quad (3'') - (2'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 & = & 2 \quad (1) \\ 2y + 2 \times 3 & = & 12 \quad (2') \\ z & = & 3 \quad (3'') - (2'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 & = & -1 \quad (1) \\ y & = & 3 \quad (2') \\ z & = & 3 \quad (3'') - (2'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \quad (1) \\ y & = & 3 \quad (2') \\ z & = & 3 \quad (3'') - (2'') \end{cases}$$

2.2 Systèmes linéaires et matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si on calcule le produit matriciel AX, on trouve :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{pmatrix}$$

D'où, l'équation matricielle $AX = B$ équivaut au système d'équations :

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Exemple.
Le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & 0 \\ x - 2y + 2z & = & 11 \\ -x + 6y - 5z & = & -28 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -28 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Remarque.
On écrit dans A les coefficients de x, y et z, dans X les inconnues (x, y et z) et dans B les constantes.

Définition (Matrice inverse).
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n inversible.
La *matrice inverse* de A, notée A^{-1}, est la matrice définie par :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

où I_n est la matrice identité de taille n.

Exemple.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
B est la matrice inverse de A. En effet,

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre matriciellement le système (S), il faut trouver le vecteur X tel que $AX = B$. Si la matrice A est inversible, on sait alors que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = Id$$

d'où :

$$\begin{aligned} AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IdX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Pour résoudre un système matriciellement, il faut donc :

1. Prouver que la matrice A est inversible (grâce au déterminant)
2. Trouver la matrice inverse A^{-1}

2.3 Déterminant d'une matrice carrée

Le déterminant est un outil qui permet de déterminer si une matrice est inversible.

Définition.
Soit A une matrice carrée de <u>taille 2</u> telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\det(A) = ad - cb = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} - \\ + \end{array}$$

Définition (Méthode de Sarrus).
Soit A une matrice carrée de <u>taille 3</u> telle que $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$. Alors

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & - \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & - \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & - \\ \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & + \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & + \\ & & & + \end{array}$$

Théorème.
Soit A une matrice carrée.
A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

Exemple.
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
On a :

$$\det(A) = 3 \times 2 - 1 \times 6 = 0$$

donc la matrice A n'est pas inversible.

$$\det(B) = 1 \times 0 \times 4 + 2 \times 1 \times 3 + 0 \times 2 \times 1 - 2 \times 2 \times 4 - 1 \times 1 \times 1 - 0 \times 0 \times 3 = 6 - 16 - 1 = -11$$

donc la matrice B est inversible.

Théorème (Propriétés du déterminant).
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

1. $\det({}^tA) = \det(A)$.
2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
3. *Si A est une matrice triangulaire, alors* $\det(A)$ *est égal au produit des termes de la diagonale.*

Théorème (Propriétés complémentaires).

1. *Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est formée uniquement de* 0 *est nul.*
2. *Un déterminant qui a deux colonnes (resp. deux lignes) identiques est nul.*
3. *Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des* ***autres*** *colonnes (resp. des* ***autres*** *lignes) est nul.*
4. *Le déterminant est inchangé si l'on ajoute à une colonne (respectivement à une ligne) une combinaison linéaire des* ***autres*** *colonnes (resp. des* ***autres*** *lignes). Autrement dit, si on effectue des opérations du type $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$ (resp. $L_j \leftarrow L_j + \alpha L_i$), le déterminant reste le même.*

Remarque.
- Un méthode pour calculer un déterminant, est donc, d'effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes, afin d'obtenir une matrice triangulaire, puis de multiplier les termes de la diagonale.
- Pour triangulariser une matrice, on peut par exemple utiliser la méthode de Gauss.

Exemple.

Calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode de Gauss.

$$\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{-3}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{2} L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_1 \end{matrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{matrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{vmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - \frac{-4}{6} L_3 \\
&= -2 \times 2 \times 6 \times \frac{17}{3} = -136
\end{aligned}$$

Définition (Mineur).
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{k,l}$.
Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n.
On appelle *mineur* de $a_{i,j}$, le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A, obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{mineur de } a_{1,2} = \Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{4} \\ 0 & \cancel{2} & 1 \\ 1 & \cancel{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Définition (Cofacteur).
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{k,l}$.
Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n.
On appelle *cofacteur* de $a_{i,j}$ la quantité :

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{cofacteur de } a_{1,2} = (-1)^{1+2}\Delta_{1,2} = -1 \times (-1) = 1$$

Théorème (Développement suivant une colonne).
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$.

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On choisit de développer par rapport à la première colonne.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2-3) + (0-8) = -9 \end{aligned}$$

Théorème (Développement suivant une ligne).
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On choisit de développer par rapport à la deuxième ligne.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(1-4) - (3-0) = -9 \end{aligned}$$

2.4 Inverse d'une matrice carrée

Définition (Comatrice).
Soit A une matrice carrée.
On appelle *comatrice* de A, notée $Com(A)$, la matrice des cofacteurs de A.

Remarque.
Si on note $a_{i,j}$ le coefficient de A à la i-ème ligne et j-ème colonne, et $c_{i,j}$ le coefficient de $Com(A)$ à la i-ème ligne et j-ème colonne, on a :

$$c_{i,j} = \text{cofacteur de } a_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur de $a_{i,j}$.

Exemple.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$Com(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème.
Soit A une matrice carrée inversible. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{Com}(A)$$

Exemple.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -1 & 12 & -8 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -12 & 8 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Théorème.
Si on transforme une matrice carrée A en Id à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. sur les colonnes) et qu'on applique ces mêmes opérations simultanément à la matrice Id, on obtient la matrice inverse de A, A^{-1}.

Remarque.
Il faut choisir au départ, soit lignes, soit colonnes, et ne plus changer après !

Exemple.

$$\begin{array}{ccc}
A & & Id \\[1em]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\[1em]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\[1em]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\dfrac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\[1em]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -\dfrac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\[1em]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 & \begin{pmatrix} 9 & 12 & -8 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -\dfrac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\[1em]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow 2L_3 & \begin{pmatrix} 9 & 12 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\[1em]
Id & & A^{-1}
\end{array}$$

Chapitre 3

Polynômes

3.1 L'espace des polynômes

Définition (Polynôme, Degré, Coefficient).
On appelle *polynôme* à coefficients réels (respectivement complexes) toute expression de la forme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

où :

- $n \in \mathbb{N}$ est appelé *degré* de P et noté $\deg(P)$,
- $\forall i \in \{0, n\}$, $a_i \in \mathbb{R}$ (respectivement $a_i \in \mathbb{C}$),
- a_i est appelé *coefficient* de X^i.

Remarque. Un polynôme est donc une somme de puissances entières et positives de X

Définition (Ensemble des polynômes).
On note $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$) l'*ensemble des polynômes* à coefficients réels (resp. complexes).

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ (resp. $\mathbb{C}_n[X]$) l'*ensemble des polynômes* à coefficients réels (resp. complexes) de degré inférieur ou égal à n.

Exemples.

1. $P(X) = 2X^3 - 3X$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $\deg(P) = 3$
2. $Q(X) = iX^2 + 1 - i$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $\deg(Q) = 2$
3. $R(X) = \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{X^2} + 2$ n'est pas un polynôme.
4. $S(X) = \left(\sqrt{X}\right)^2 + 2\sqrt{X} - 1$ n'est pas un polynôme.

Théorème (Propriétés du degré).
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$).

1. $P \times Q \in \mathbb{R}[X]$ *(resp.* $P \times Q \in \mathbb{C}[X]$*),* $\quad \deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda P \in \mathbb{R}[X]$ *(resp.* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda P \in \mathbb{C}[X]$*),* $\quad \deg(\lambda P) = \deg(P) \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.
3. $P + Q \in \mathbb{R}[X]$ *(resp.* $P + Q \in \mathbb{C}[X]$*),* $\quad \deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
   avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
4. $P \circ Q \in \mathbb{R}[X]$ *(resp.* $P \circ Q \in \mathbb{C}[X]$*),* $\quad \deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exemples.
$P(X) = X^2 + 1, \quad Q(X) = X^3, \quad R(X) = -X^2 + X$

- ▷ $P \times Q = X^5 + X^3$, $\deg(P \times Q) = 3 + 2 = 5$,
- ▷ $4P = 4X^2 + 4$, $\deg(4P) = 2$,
- ▷ $P + Q = X^3 + X^2 + 1$, $\deg(P + Q) = max(\deg(P), \deg(Q)) = 3$,
- ▷ $P \circ Q = (X^3)^2 + 1 = X^6 + 1$, $\deg(P \circ Q) = 3 \times 2 = 6$,
- ▷ $P + R = X + 1$, $\deg(P + R) = 1 \leq max(\deg(P), \deg(R)) = 2$,

Théorème.
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$).

1. $\forall X \in \mathbb{R} : P(X) = 0 \Leftrightarrow$ *tous les coefficients sont nuls*
2. $\forall X \in \mathbb{R} : P(X) = Q(X) \Leftrightarrow \deg(P) = \deg(Q)$ *et tous les coefficients de P et Q sont égaux 2 à 2*

3.2 Racines d'un polynôme

Définition (Racine).
Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).
On dit que a est une *racine* de P si et seulement si $P(a) = 0$.

Exemples.

1. $P(X) = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ admet 1 comme racine.
2. $Q(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ admet i comme racine.

Théorème.
Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).

$$a \text{ est racine de } P$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ (resp. } Q \in \mathbb{C}[X]) \text{ tel que } \deg(Q) = \deg(P) - 1 \text{ et } P(X) = (X - a)Q(X)$$

C'est à dire que a est racine de P si et seulement si on peut factoriser P par $(X - a)$.

Exemples.

1. Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
   1 est une racine de P, on peut donc factoriser par $(X - 1)$.
   $P(X) = (X - 1)(X^2 - 5X + 6)$
   2 est une racine de P, on peut donc factoriser par $(X - 2)$.
   $P(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$
2. Soit $Q(X) = 2iX^2 + (i + 1)X + 1 + i$. Factoriser Q dans $\mathbb{C}[X]$.
   i est une racine de Q, on peut donc factoriser par $(X - i)$.
   $Q(X) = (X - i)(2iX - 1 + i)$

Remarque.

- Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, c'est trouver toutes les racines réelles de P et décomposer P en produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 ou de de degré 2 irréductibles.
- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, c'est trouver toutes les racines complexes de P et décomposer P en produit de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré 1.

Théorème.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ (i.e. $a \in \mathbb{C}$ mais $a \notin \mathbb{R}$).

$$a \text{ est racine de } P \Leftrightarrow \bar{a} \text{ est racine de } P$$

Remarque.
Il **faut** que P soit à coefficients **réels**.

Exemples.

1. $P(X) = X^2 + 1$,
   i et $-i$ sont racines de P
2. $Q(X) = iX^2 + (3 - i)X + (-1 - 2i)$,
   i est racine de Q mais $-i$ ne l'est pas.

Remarque.
Réciproquement, si les conjugués de toutes les racines de P sont également racines de P, alors $P \in \mathbb{R}[X]$.

Définition (Racine multiple, Multiplicité).
Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).
On dit que

a est une *racine multiple* de *multiplicité* $m \in \mathbb{N}^*$
si et seulement si
il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $Q \in \mathbb{C}[X]$) tel que $P(X) = (X-a)^m Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.

Exemples.
1. $P(X) = X^2 + 4X + 4 = (X+2)^2$,
   -2 est une racine de multiplicité 2 de P (on dit aussi racine double de P).
2. $Q(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X+1)(X^2+2X+1) = (X+1)^3$,
   -1 est une racine de multiplicité 3 de P.
3. $R(X) = X^3 + 3X^2 - 9X + 5 = (X-1)(X^2+4X-5) = (X-1)^2(X+5)$,
   1 est une racine double et -5 est une racine simple de R.

Théorème.
Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).

$$a \text{ est racine de multiplicité } m \in \mathbb{N}^* \text{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad \forall k < m,\ P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Remarque.
$P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de P.
Si a est une racine de P', a n'est pas forcément une racine de P ! Par exemple, si $P(X) = X^2 + 1$, $P'(X) = 2X$. On a alors $P'(0) = 0$ mais $P(0) \neq 0$.

3.3 Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$

Définition (Division euclidienne, Quotient, Reste).
Soient P et D deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
Faire la *division euclidienne* de P par D c'est trouver les polynômes Q et R tels que :

$$P(X) = Q(X) \times D(X) + R(X)$$

avec $\deg(R) < \deg(D)$. Le polynôme Q est appelé *quotient* et le polynôme R est appelé *reste*.

Méthode : Pour effectuer la division euclidienne d'un polynôme P par un polynôme D, et donc trouver les polynômes Q et R, il **faut** poser la division.

Exemples.
Faire la division euclidienne de $P(X) = X^2 + 3X + 2$ par $D(X) = X - 5$.

$$
\begin{array}{r|l}
X^2 + 3X + 2 & X - 5 \\ \cline{2-2}
-\ (X^2 - 5X) & X + 8 \longleftarrow Q(X) \\ \cline{1-1}
8X + 2 & \\
-\ (8X - 40) & \\ \cline{1-1}
42 & \\
R(X) \nearrow \quad &
\end{array}
$$

Donc

$$P(X) = (X + 8)(X - 5) + 42$$

Remarque.

1. Les polynômes Q et R sont uniques.
2. Il faut au plus $\deg(P) - \deg(D) + 1$ étapes pour effectuer la division euclidienne de P par D.

> **Théorème.**
> *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $a \in \mathbb{R}$.*
> *Si le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ est nul, alors a est racine de P.*

Exemples.
Faire la division euclidienne de $P(X) = X^3 + 4X^2 - 3X - 2$ par $D(X) = X - 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 + 4X^2 - 3X - 2 & X - 1 \\ \cline{2-2}
-\ (X^3 - \ X^2) & X^2 + 5X + 2 \\ \cline{1-1}
5X^2 - 3X - 2 & \\
-\ (5X^2 - 5X) & \\ \cline{1-1}
2X - 2 & \\
-\ (2X - 2) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc

$$P(X) = (X^2 + 5X + 2)(X - 1)$$

et donc 1 est racine de P.

3.4 Décomposition en éléments simples (D.E.S.)

On s'intéresse aux fonctions rationnelles, c'est à dire aux fonctions de la forme :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{où } (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$$

Une telle fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$.
Le but de cette décomposition, est de calculer des intégrales de fonctions rationnelles (dont on ne connait pas de primitive) telles que $\int \frac{3x+1}{x^2+2x-3}dx$ ou $\int \frac{x^4}{x^3+3x^2+x-5}dx$.

3.4.1 Partie entière et partie fractionnaire

Théorème. *Soit* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *une fonction rationnelle.*
Il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ *tel que,*

$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \textit{avec } \deg(R) < \deg(Q)$$

- ▷ *Le polynôme* E *est appelé* partie entière *de* f.
- ▷ *le quotient de polynômes* $\frac{R}{Q}$ *est appelé* partie fractionnaire *de* f.

Méthode : Pour trouver la partie entière et la partie fractionnaire d'une fonction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, on fait la division euclidienne de P par Q.

Exemples.
Trouver la partie entière et la partie fractionnaire de $f(x) = \frac{x^4-3x+2}{x^2-5x+1}$.

1. On fait la division euclidienne de $P(X) = X^4 - 3X + 2$ par $Q(X) = X^2 - 5X + 1$.
   En posant la division, on trouve :
   $$X^4 - 3X + 2 = (X^2 + 5X + 24)(X^2 - 5X + 1) + (112X - 22)$$
2. On divise le résultat de la division euclidienne par Q.
   On obtient alors :
   $$\frac{X^4 - 3X + 2}{X^2 - 5X + 1} = X^2 + 5X + 24 + \frac{112X - 22}{X^2 - 5X + 1}$$
3. On a donc :
   $$f(x) = x^2 + 5x + 25 + \frac{112x - 22}{x^2 - 5x + 1}$$

La partie entière E est facilement intégrable puisqu'il s'agit d'un polynôme. En revanche, ce n'est souvent pas le cas pour la partie fractionnaire. On cherche donc une manière de décomposer $\frac{R}{Q}$ pour pouvoir intégrer facilement.

Dans toute la suite, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ **avec** $\deg(P) < \deg(Q)$**.**

L'idée de la D.E.S. est de transformer $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$ en une somme de fractions,

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \cdots$$

où :

- ▷ $\deg(P_i) < \deg(Q_i)$
- ▷ $\deg(Q_i) = 1 \ \text{ ou } \ 2$
- ▷ Q_i n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$

Exemples.
La D.E.S de $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ est

$$f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

3.4.2 Cas de première espèce - racines simples

Supposons que Q est factorisable en produit de polynômes de la forme $(X - \alpha_i)$ tous distincts.
Autrement dit :

$$Q(X) = \beta(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\cdots$$

alors il existe des constantes a_1, a_2, $\cdots$ telles que :

$$Q(x) = \frac{a_1}{x - \alpha_1} + \frac{a_2}{x - \alpha_2} + \cdots \tag{3.1}$$

Exemples.
Soit $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x-2)(x+3)}$. La forme de la D.E.S est :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$$

Il faut donc trouver les constantes a, b et c.

Méthode 1 : Par identification (à éviter)
Après avoir décomposé f en somme d'éléments de la forme $\dfrac{a}{x-\alpha_i}$,

1. On réduit f au même dénominateur.
2. On développe le numérateur.
3. On identifie les coefficients.
4. On résout le système pour trouver les a_i.

Exemple 23 (suite - Méthode 1).
On sait que

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$$

d'où en réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$f(x) = \frac{a(x-2)(x+3) + b(x-1)(x+3) + c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

En développant le numérateur, on a :

$$f(x) = \frac{(a+b+c)x^2 + (a+2b-3c)x - 6a - 3b + 2c}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} a+b+c & = & 1 \\ a+2b-3c & = & -3 \\ -6a-3b+2c & = & 5 \end{cases}$$

Finalement, en résolvant le système, on trouve :

$$\begin{cases} a & = & \dfrac{-3}{4} \\ \\ b & = & \dfrac{3}{5} \\ \\ c & = & \dfrac{23}{20} \end{cases}$$

Méthode 2 :
Pour calculer a_i,

1. On multiplie l'équation (3.1) par $(x-\alpha_i)$.
2. On remplace x par α_i.

Exemple 23 (suite - Méthode 2).
On sait que

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} = \frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)(x+3)} \tag{3.2}$$

Pour trouver a, on multiplie l'expression (3.2) par $(x-1)$, on obtient :

$$a + \frac{b(x-1)}{x-2} + \frac{c(x-1)}{x+3} = \frac{x^2-3x+5}{(x-2)(x+3)}$$

Puis on remplace x par 1, on a alors :

$$a = \frac{-3}{4}$$

De la même manière, pour trouver b on multiplie l'expression (3.2) par $(x-2)$,

$$\frac{a(x-2)}{x-1} + b + \frac{c(x-2)}{x+3} = \frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x+3)}$$

puis on remplace x par 2,

$$b = \frac{3}{5}$$

Et pour trouver c, on multiplie (3.2) par $(x+3)$,

$$\frac{a(x+3)}{x-1} + \frac{b(x+3)}{x-2} + c = \frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)}$$

et on remplace x par -3,

$$c = \frac{23}{20}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{x-1} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{x-2} + \frac{23}{20} \times \frac{1}{x+3}$$

3.4.3 Cas de première espèce - racines multiples

Supposons que Q est factorisable en produit de polynômes de la forme $(X-\alpha_i)$ et que Q possède une racine multiple. Autrement dit :

$$Q(X) = \beta(X-\alpha)^m(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots$$

avec $m > 1$, alors il existe des constantes $a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \cdots, a_1, a_2, \cdots$ telles que :

$$Q(x) = \frac{a_{0,1}}{x-\alpha} + \frac{a_{0,2}}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_{0,m}}{(x-\alpha)^m} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{a_2}{(x-\alpha_2)} + \cdots \tag{3.3}$$

Exemples.
Soit $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)^2(x+1)}$. La forme de la D.E.S est :

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{x+1}$$

Il faut donc trouver les constantes a, b et c.

Méthode :

1. On calcule c en utilisant la méthode 2 du paragraphe précédent.
2. On calcule b (la constante correspondant à la plus grande puissance) : on multiplie l'équation (3.3) par $(x-\alpha)^m$ puis on remplace x par α.
3. On calcule c (la constante correspondant à la plus petite puissance). Pour cela, on multiplie l'équation (3.3) par x puis on fait tendre x vers $+\infty$.

Exemple 24 (suite).
On sait que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{x+1} = \frac{2x}{(x-2)^2(x+1)} \tag{3.4}$$

Pour trouver c, on multiplie l'expression (3.4) par $(x+1)$, on obtient :

$$\frac{a(x+1)}{x-2} + \frac{b(x+1)}{(x-2)^2} + c = \frac{2x}{(x-2)^2}$$

puis on remplace x par -1,

$$c = -\frac{2}{9}$$

Pour trouver b (coefficient de la plus grande puissance), on multiplie l'expression (3.4) par $(x-2)^2$, on obtient :

$$a(x-2) + b + \frac{c(x-2)^2}{x+1} = \frac{2x}{(x+1)}$$

puis on remplace x par 2,

$$b = \frac{4}{3}$$

Pour trouver a (coefficient de la plus petite puissance), on on multiplie l'expression (3.4) par x, on obtient :

$$\frac{ax}{x-2} + \frac{bx}{(x-2)^2} + \frac{cx}{x+1} = \frac{2x^2}{(x-2)^2(x+1)}$$

puis on fait tendre x vers $+\infty$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{ax}{x-2} & + & \dfrac{bx}{(x-2)^2} & + & \dfrac{cx}{x+1} & = & \dfrac{2x^2}{(x-2)^2(x+1)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} \\ a & + & 0 & + & c & = & 0 \end{array}$$

donc

$$a = -c = \frac{2}{9}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{x-2} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{x+1}$$

3.4.4 Cas de seconde espèce

Supposons que Q est factorisable sous la forme :

$$Q(X) = \beta(X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2)(X - \alpha_1)$$

où $X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, alors il existe des constantes a_1, a_2 et b_1 telles que :

$$Q(x) = \frac{ax+b}{X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2} + \frac{c}{X - \alpha_1} \tag{3.5}$$

Exemples.
Soit $f(x) = \dfrac{3x+2}{(x^2+2x+2)(x+3)}$. La forme de la D.E.S est :

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} + \frac{c}{x+3}$$

Il faut donc trouver a, b, et c.

Méthode :

1. Pour trouver c, on utilise la méthode 2 présentée précédemment.
2. Pour trouver a, on multiplie l'équation (3.5) par x puis on fait tendre x vers $+\infty$.
3. Pour trouver b, on remplace x par 0 dans l'équation (3.5).

Exemple 25 (suite).
On sait que

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} + \frac{c}{x+3} = \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)(x+3)} \tag{3.6}$$

Pour trouver c, on multiplie l'expression (3.6) par $(x+3)$, on obtient :

$$\frac{(ax+b)(x+3)}{x^2+2x+2} + c = \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)}$$

puis on remplace x par -3,

$$c = \frac{-7}{5}$$

Pour trouver a, on multiplie l'expression (3.6) par x, on obtient :

$$\frac{(ax+b)x}{x^2+2x+2} + \frac{cx}{x+3} = \frac{(3x+2)x}{(x^2+2x+2)(x+3)}$$

puis on fait tendre x vers $+\infty$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{(ax+b)x}{x^2+2x+2} & + & \dfrac{cx}{x+3} & = & \dfrac{(3x+2)x}{(x^2+2x+2)(x+3)} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x\to+\infty} \\
a & + & c & = & 0
\end{array}$$

donc

$$a = -c = \frac{7}{5}$$

Pour trouver b, on remplace x par 0 dans l'expression (3.6),

$$\frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \frac{b}{2} - \frac{7}{15} = \frac{2}{6}$$

donc

$$b = 2 \times \left(\frac{2}{6} + \frac{7}{15}\right) = 2 \times \left(\frac{10}{30} + \frac{14}{30}\right) = \frac{24}{15}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{3}{15} \times \frac{7x+8}{x^2+2x+2} - \frac{7}{5} \times \frac{1}{x+3}$$

Remarque.
On peut aussi travailler dans $\mathbb{C}$ et se ramener à un cas de première espèce.

Exemples.
Soit $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$. Dans $\mathbb{C}$, on a :

$$x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$$

d'où :

$$f(x) = \frac{x}{(x-i)(x+i)(x-1)}$$

Il s'agit d'un cas de première espèce d'ordre 1, la forme de la D.E.S de f dans $\mathbb{C}$ est donc :

$$f(x) = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i} + \frac{c}{x-1} = \frac{x}{(x-i)(x+i)(x-1)} \tag{3.7}$$

où a, b et c peuvent être dans $\mathbb{C}$.
On utilise la méthode 2 pour déterminer a, b et c. En multipliant (3.7) par $(x-i)$ et en remplaçant x par i, on trouve :

$$a = \frac{i}{2i(i-1)} = \frac{1}{2(i-1)}$$

En multipliant (3.7) par $(x+i)$ et en remplaçant x par $-i$, on trouve :

$$b = \frac{-i}{2i(i+1)} = \frac{-1}{2(i+1)}$$

En multipliant (3.7) par $(x-1)$ et en remplaçant x par 1, on trouve :

$$c = \frac{1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}$$

On a alors :

$$f(x) = \frac{1}{2(i-1)(x-i)} - \frac{1}{2(i+1)(x+i)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

Finalement, pour trouver la D.E.S de f dans $\mathbb{R}$, on regroupe les termes complexes. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(i-1)(x-i)} - \frac{1}{2(i+1)(x+i)} &= \frac{(i+1)(x+i)-(i-1)(x-i)}{2(i-1)(i+1)(x+i)(x-i)} \\
&= \frac{ix-1+x+i-ix-1+x-i}{-4(x^2+1)} \\
&= \frac{2x-2}{-4(x^2+1)} \\
&= \frac{1-x}{2(x^2+1)}
\end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \frac{1-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

3.4.5 Application au calcul d'intégrales

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{x^4+3x^3-2}{x^2+2x-3}dx$$

Pour trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x^4+3x^3-2}{x^2+2x-3}$, on cherche la décomposition en élément simple de f.
Pour cela, on commence par déterminer la partie entière et la partie fractionnaire de f.
En effectuant la division euclidienne de (X^4+3X^3-2) par (X^2+2X-3), on trouve :

$$X^4+3X^3-2 = (X^2+2X-3)(X^2+X+1)+X+1$$

d'où :

$$f(x) = x^2+x+1+\frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

On cherche maintenant la D.E.S de la partie fractionnaire $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$.
Comme $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, il s'agit d'un cas de première espèce d'ordre 1, la D.E.S est donc de la forme :

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3}=\frac{x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3} \tag{3.8}$$

Pour trouver a, on multiplie l'expression (3.8) par $(x-1)$, puis on remplace x par 1. On trouve :

$$a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Pour trouver b, on multiplie l'expression (3.8) par $(x+3)$, puis on remplace x par -3. On trouve :

$$b=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

Finalement, on a :

$$f(x)=x^2+x+1+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+3)}$$

On peut maintenant intégrer f.

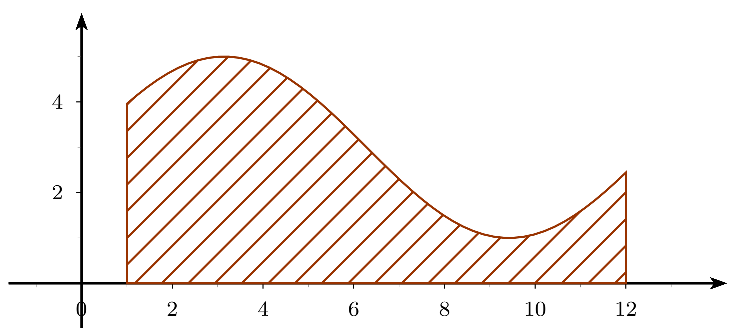
$$\begin{aligned}
I=\int_{-1}^{0} f(x)dx &= \int_{-1}^{0}\left(x^2+x+1+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+3)}\right)dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2dx+\int_{-1}^{0} xdx+\int_{-1}^{0} 1dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{x+3}dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\Big[x\Big]_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\Big[\ln(|x-1|)\Big]_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\Big[\ln(|x+3|)\Big]_{-1}^{0} \\
&= 0-\frac{-1}{3}+0-\frac{1}{2}+0-(-1)+\frac{1}{2}(\ln(1)-\ln(2))+\frac{1}{2}(\ln(3)-\ln(2)) \\
&= \frac{5}{6}+\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Intégrale d'une fonction

4.1 Point de vue graphique : lien entre aire et intégrale

Définition (Domaine associé). On appelle domaine associé à une fonction f sur $[a, b]$, le domaine $\mathcal{E}$ délimité par $\mathcal{C}_f$ (courbe de f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Définition (Cas d'une fonction positive). Soit f une fonction positive sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$). On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ la valeur de l'aire du domaine associé à f sur $[a, b]$. On note cette valeur :

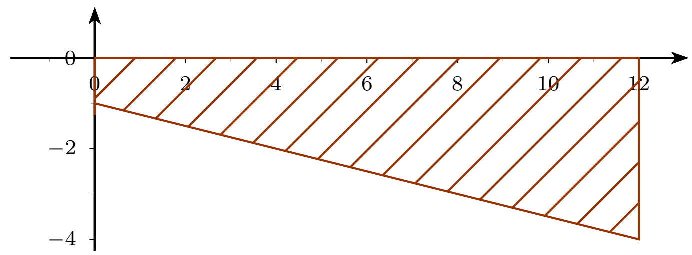
$$\int_a^b f(t)dt$$

Exemple. $\int_1^5 2dt = 4 \times 2 = 8$, c'est la surface d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 4.

Définition (Cas d'une fonction négative). Soit f une fonction négative sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$). On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ l'opposée de la valeur de l'aire du domaine associé à f sur $[a, b]$. On note cette valeur :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Exemple. $\int_0^1 2 - \frac{1}{4}t - 1dt = -\left(12 + \frac{12\times3}{2}\right) = -30$, c'est la surface d'un trapèze.



4.1.1 Propriétés graphiques de l'intégrale

Relation de Chasles

Théorème. *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et soit $a \leq c \leq b$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Linéarité de l'intégrale

Théorème. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

- *Intégrale d'une somme :*

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

- *Intégrale du produit par un réel :*

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

Inégalité

Théorème. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.*
Si $f(t) \leq g(t)$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Parité

Remarque. Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction.

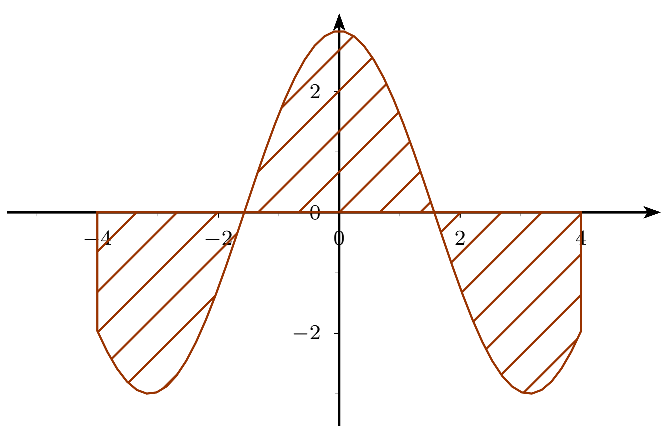
- Si $f(-x) = f(x)$ alors f est paire. Graphiquement, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- Si $f(-x) = -f(x)$ alors f est impaire. Graphiquement, la courbe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple.

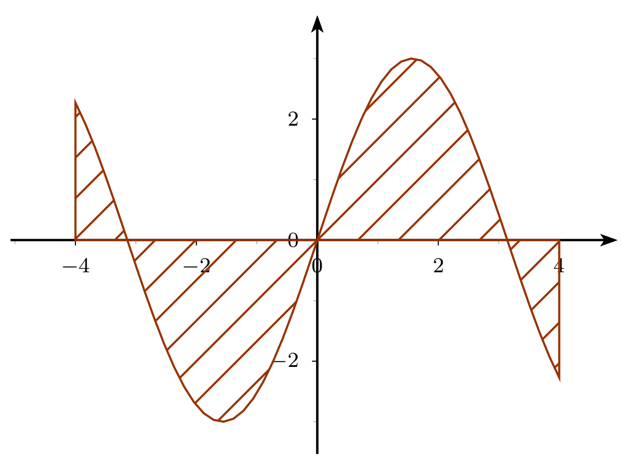
- Les fonctions $\cos(x)$ et x^2 sont paires. Plus généralement, x^{2p} avec $p \in \mathbb{N}$ est paire.
- Les fonctions $\sin(x)$ et x sont impaires. Plus généralement, x^{2p+1} avec $p \in \mathbb{N}$ est impaire.

Théorème. *Soit f une fonction intégrable sur $[-a, a]$ $(a \in \mathbb{R}^+)$. Alors :*

- *Si f est paire :*
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$
- *Si f est impaire :*
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$



Intégrale d'une fonction paire



Intégrale d'une fonction impaire

<u>ATTENTION :</u> Il faut bien vérifier que l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à 0 sinon cela ne fonctionne pas !

Exemple.

- $\int_{-1}^{1} \frac{t}{1+t^2} dt =$
- $\int_{-\pi\sqrt{3}}^{\pi\sqrt{3}} 123x^9 + 38x^5 + 1024x^3 + x\, dx =$

<u>ATTENTION :</u> Il faut y penser ! Utiliser la parité simplifie en général grandement les calculs !

Périodicité

Remarque. Soit f une fonction continue pas morceaux sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction est périodique de période T si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t+T) = f(t)$$

On dit également que f est T-périodique.

Exemple. Les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont toutes deux périodiques de période 2π.

Théorème. *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, périodique de période T et $a \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Autrement dit, l'intégrale $\int_a^{a+T} f(t)dt$ est indépendante de a. On la note alors $\int_{[T]} f(t)dt$.

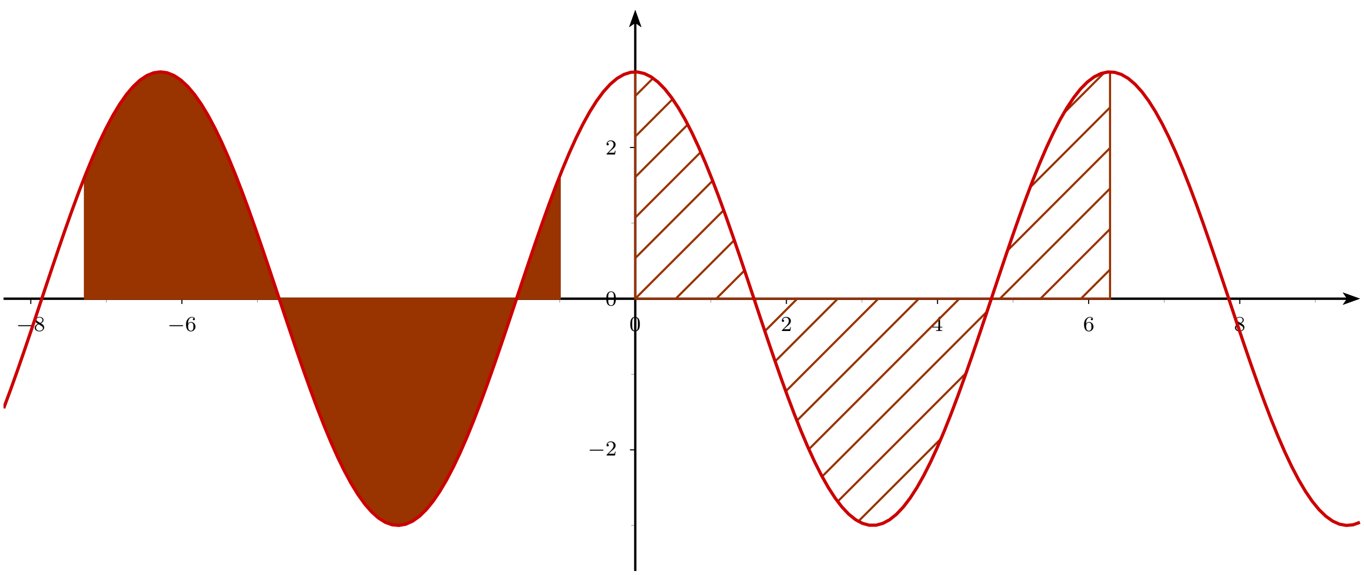


FIGURE 4.1 – Intégrale d'une fonction périodique

4.2 Méthodes de calcul intégral

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur D.

Définition. Une fonction $F : D \to \mathbb{R}$ est une primitive de f dans D si et seulement si

- F est dérivable sur D,
- $F' = f$ dans D.

Théorème. *Si F et G sont deux primitives de f, alors $F-G$ est une constante sur tout intervalle $I \subset D$.*

Théorème. *Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive F.*

Théorème. *Soit f une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

Remarque. On utilisera la notation suivante : $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.
Autrement dit :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

<u>ATTENTION :</u> Dans l'écriture $\int_a^b f(t)dt$, on peut remplacer la lettre « t » par n'importe quelle autre lettre ou symbole (autre que a et b évidemment) et écrire $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f(u)du$... au lieu de $\int_a^b f(t)dt$: il s'agit d'une variable muette.

<u>ATTENTION :</u> le « dt » apporte un information importante : il précise par rapport à quelle variable on effectue l'intégration !

Remarque. Le choix de la primitive est libre : si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$, elles diffèrent d'une constante et alors $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Théorème (Propriétés immédiates). *Ces propriétés découlent immédiatement du théorème précédent.*

- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ *(inversion des bornes)*
- $\int_a^b k\,dt = k(b-a)$ *(k étant un réel quelconque)*

En particulier, $\int_a^b dt = b - a$ *(on écrit* $\int_a^b dt$ *et pas* $\int_a^b 1\,dt$ *).*

Le tableau suivant regroupe les primitives classiques à connaître !

$f(t)$	$F(t)$
t^n $(n \in \mathbb{N})$	
$\frac{1}{t}$	
$\frac{1}{t^n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$	
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	
t^α $(\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$	
$\cos(t)$	
$\sin(t)$	
e^t	
$\frac{1}{1+t^2}$	

$f(t)$	$F(t)$
$u'(t)(u(t))^n$ $(n \in \mathbb{N})$	
$\frac{u'(t)}{u(t)}$	
$\frac{u'(t)}{(u(t))^n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$	
$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$	
$u'(t)(u(t))^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$	
$u'(t)\cos(u(t))$	
$u'(t)\sin(u(t))$	
$u'(t)e^{u(t)}$	
$\frac{u'(t)}{1+(u(t))^2}$	

Primitives classiques

Exemple.

- $\displaystyle\int_0^1 t^5 dt =$
- $\displaystyle\int_0^1 e^t dt =$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t} =$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t^2+3} dt =$
- $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(2t) dt =$
- $\displaystyle\int_2^4 e^{t/2} dt =$

4.2.1 Fractions rationelles et D.E.S.

• **Reconnaître $\frac{P'(x)}{P^n(x)}$ avec P un polynôme ($n \in \mathbb{N}$)**

Cette méthode peut s'appliquer lorsqu'on a un quotient de polynômes du type $\frac{Q}{P^n}$ et que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. Il faut essayer de faire apparaître P' au numérateur.

Exemple. Calculer :

1. $\int_2^3 \frac{2}{2x-3} dx =$
2. $\int_1^2 \frac{x^2+2}{x^3+6x} dx =$
3. $\int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx =$

• **Reconnaître $\frac{P'(x)}{1+P^2(x)}$ avec P un polynôme**

<u>rem</u> Une primitivve de $\frac{P'(x)}{1+P^2(x)}$ est $\arctan(P(x))$.

On utilise en particulier cette technique pour calculer les intégrales de fonctions du type

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

.
Pour cela, on écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique.

Exemple. Calculer :

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx =$
2. $\int_0^1 \frac{2}{4x^2+1} dx =$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2} dx =$

Le Cas général : Décomposition en éléments simples

Pour calculer les intégrales du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes.

<u>ATTENTION :</u> Commencer par vérifier si on connaît une primitive de ces fonctions !

• **Méthode :**

On effectue la décomposition en éléments simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Exemple. Calculer :

1. $\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx =$
2. $\int_2^3 \frac{x+1}{x-1} dx =$

3. $\int_3^4 \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx =$
4. $\int_3^4 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx =$

Pour résumer, la DES conduit à intégrer 4 types d'éléments simples :

1er type : la partie entière. C'est un polynôme !
2ème type : $\frac{1}{t+\alpha}$ qui s'intègre en $\ln|t+\alpha|$
3ème type : $\frac{1}{(t+\alpha)^n}$ (avec $n > 1$) qui s'intègre en $\frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{t+\alpha}\right)^{n-1}$
4ème type : $\frac{At+B}{at^2+bt+c}$ (avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$). On sépare la fonction en deux partie de manière à faire apparaître $\frac{u'(t)}{u(t)}$ d'une part et $\frac{u'(t)}{(u(t))^2+1}$ d'autre part.

4.2.2 Fonction « polynômiale » en sinus et cosinus

But : Calculer les intégrales de fonctions du type :

1. $\cos^n(x)\sin^m(x)$
2. $\cos(\alpha x)\sin(\beta x)$
3. $\cos^n(x)\sin(\beta x)$
4. $\cos(\alpha x)\sin^m(x)$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$

ATTENTION : Commencer par vérifier si on connaît une primitive de ces fonctions !

Exemple. Calculer

1. $\int_0^\pi \cos(2x)\sin^2(2x)dx =$
2. $\int_0^\pi \sin(3x)\cos^4(3x)dx =$

• **Méthode :**

Si aucune formule de primitive ne convient, alors on **linéarise** en utilisant, par exemple, les formules d'Euler :

$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\qquad$ $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Exemple. Calculer

1. $I = \int_0^\pi \sin(4x)\cos(5x)dx$. On pose $f(x) = \sin(4x)\cos(5x)$. On linéarise

$$\begin{aligned}
\sin(4x)\cos(5x) &= \frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{2i} \times \frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2} \\
&= \frac{1}{4i}(e^{i9x} - e^{-i9x} - e^{ix} + e^{-ix}) \\
&= \frac{1}{4i}(2i\sin(9x) - 2i\sin(x)) = \frac{1}{2}(\sin(9x) - \sin(x))
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(4x)\cos(5x)dx &= \int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin(9x) - \sin(x)) \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{9}\cos(9x) + \cos(x)\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\cos(9\pi) + \cos(\pi) + \frac{1}{9}\cos(0) - \cos(0)\right) \\
&= \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

2. $\int_0^\pi \cos^2(x)\sin(2x)dx =$
3. $\int_0^\pi \cos^2(x)\sin^2(x)dx =$

4.2.3 Intégration par parties (IPP)

Théorème (Formule d'intégration par parties). *Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$ telles que leurs dérivées sont continues sur $[a,b]$. Alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

ATTENTION : Il faut bien choisir quelle fonction on intègre et quelle fonction on dérive de façon à se ramener à une intégrale plus simple !

Exemple. Calculer :

1. $I = \int_0^1 e^{-3t}(2t+1)dt$.
   On pose $u(t) = 2t+1$ et $v'(t) = e^{-3t}$.
   On calcule alors que $u'(t) = 2$ et $v(t) = \frac{-1}{3}e^{-3t}$.
   Donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 e^{-3t}(2t+1)dt \\
&= \left[(2t+1)\times\frac{-1}{3}e^{-3t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{3}e^{-3t}\times 2dt \\
&= \left[(2t+1)\times\frac{-1}{3}e^{-3t}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{9}e^{-3t}\right]_0^1 \\
&= -e^{-3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9}e^{-3} + \frac{2}{9} = -\frac{11}{9}e^{-3} + \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

2. $\int_0^\pi (3-2x)\cos(3x)dx$

3. $\int_1^e (1-4t)\ln(3t)dt$
4. $\int_0^1 arctan(t)dt$

Remarque. Il existe un moyen mnémotechnique pour choisir quelle fonction intégrer et quelle fonction dériver :

A rctan L og P oly E xp S in

On dérive la fonction la plus à gauche.

Remarque. On peut également utiliser l'intégration par parties pour diminuer le degré des dénominateurs des fractions rationnelles.

Exemple. Calculer $\int_2^3 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int_2^3 x \times \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

4.2.4 Changement de variable

Théorème (Formule de changement de variable). *Soit f une fonction continue et φ une fonction bijective dérivable sur un intervalle $[a,b]$ telles φ' est continue sur $[a,b]$.*
On pose $x = \varphi(t)$. On a alors, par changement de variable :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Remarque : Analysons la formule du théorème ci-dessus. On peut observer les 3 éléments qui forment une intégrale : les bornes, la fonction et le dt :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

• Les bornes : comme t varie de a à b, et que $x = \varphi(t)$, nécessairement x varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.
• la relation entre dt et dx : comme $x = \varphi(t)$, on peut considérer la variable x comme étant une fonction de t et ainsi dériver x par rapport à t :

$$x = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$$

• La fonction : comme $x = \varphi(t)$, nécessairement $f(x) = f(\varphi(t))$.

Exemple. Calculons : $I = \displaystyle\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$ en posant le changement de variable $x = \sqrt{t}$.

• Les bornes : comme t varie de 4 à 9, et que $x = \sqrt{t}$, alors x varie de $\sqrt{4} = 2$ à $\sqrt{9} = 3$.

• la relation entre dt et dx : comme $x = \sqrt{t}$, on a $x = \sqrt{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$.
Qu'on peut aussi écrire : $dt = 2xdx$

• La fonction : On remplace $\dfrac{1}{1+\sqrt{t}}$ par $\dfrac{1}{1+x}$.

Ainsi, par changement de variable :

$$I = \int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt = \int_2^3 \frac{1}{1+x}2xdx = \int_2^3 \frac{2x}{1+x}dx$$

Il suffit alors de calculer la nouvelle intégrale :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{1+x}dx & = & \displaystyle\int_2^3 2 + \frac{-2}{1+x}dx & \text{par division euclidienne} \\ & = & \left[2x - 2\ln|1+x|\right]_2^3 & \\ & = & 2 - 2\ln(4) + 2\ln(3) & \end{array}$$

Chapitre 5

Intégrale généralisée (ou intégrale impropre)

5.1 Notion d'intégrale généralisée

Nous savons intégrer des fonctions continues (par morceaux) sur des intervalles bornés du type $[a, b]$; Mais comment définir l'intégrale lorsque :

- l'une des bornes est infinie ? Par exemple $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.
- la fonction n'admet pas de limite finie en une borne ? Par exemple $\int_0^1 \ln(x)dx$.

Vocabulaire :

• On parle d'**intégrale généralisée, ou d'intégrale impropre**, lorsqu'on a au moins un des cas suivant : une borne est infinie ou la fonction tend vers l'infini lorsque la variable tend vers une des bornes.

Définition.
Soit $f\ :]a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue (par morceaux) sur $]a, b]$ avec $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

- Si $\lim\limits_{X \to a^+} \int_X^b f(t)dt$ existe et est finie, alors on dit que $\int_a^b f(t)dt$ **converge**.
- Si $\lim\limits_{X \to a^+} \int_X^b f(t)dt$ n'existe pas ou est infinie, alors on dit que $\int_a^b f(t)dt$ **diverge**.

Exemple. Etudions la nature de $\int_0^1 \frac{1}{t} \ln(t)dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Calculons $\lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} \ln(t)dt$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \mapsto 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} \ln(t)dt &= \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{2}(\ln(1))^2 - \frac{1}{2}(\ln(\varepsilon))^2 \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t} \ln(t)dt$ diverge.

Définition.
Soit $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue (par morceaux) sur $[a, +\infty[$.

- Si $\lim\limits_{X \to +\infty} \int_a^X f(t)dt$ existe et est finie, alors on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**.
- Si $\lim\limits_{X \to +\infty} \int_a^X f(t)dt$ n'existe pas ou est infinie, alors on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **diverge**.

Vocabulaire :
• Si on chercher à savoir si une intégrale généralisée converge ou diverge, on dit qu'on étudie sa nature.

Exemples.

1. Etudions la nature de $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.

   Soit $X > 1$. Calculons $\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \displaystyle\int_1^X \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

$$\begin{aligned}\lim_{X \mapsto +\infty} \int_1^X \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{X \mapsto +\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^X \\ &= \lim_{X \mapsto +\infty} 2\sqrt{X} - 2 \\ &= +\infty\end{aligned}$$

   Comme la limite est infinie, on peut dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ diverge.

2. Etudions la nature de $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$.

   Soit $X > 1$. Calculons $\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \displaystyle\int_1^X e^{-x}dx$.

$$\begin{aligned}\lim_{X \mapsto +\infty} \int_1^X e^{-x}dx &= \lim_{X \mapsto +\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^X \\ &= \lim_{X \mapsto +\infty} -e^{-X} + e^{-1} \\ &= e^{-1}\end{aligned}$$

   Comme la limite est finie, on peut dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge (vers e^{-1}).

ATTENTION :
$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ n'est pas suffisant pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge !

Remarque. On peut donner la même définition que précédemment pour l'intgérale $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

5.2 Critères de convergence

Théorème (Critère de Riemann). *Soit $a > 0$.*

1. *L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \leq 1$*
2. *L'intégrale $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ est convergente si $\alpha < 1$ et divergente si $\alpha \geq 1$*

Démonstration. du cas 1.
• Supposons $\alpha \neq 1$. Une primitive de $\frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}$ est $\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}$. On a donc

$$\int_a^X \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_a^X = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} a^{1-\alpha}$$

Or

$$\lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

d'où le résultat lorsque $\alpha \neq 1$.
• Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Nous avons

$$\int_a^X \frac{1}{t}\, dt = [\ln(t)]_a^X = \ln(X) - \ln(a)$$

Or $\lim_{x\to\infty} \ln(t) = +\infty$ d'où le fait que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ diverge. □

Exemples.

1. $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t} dt$ est divergente.
2. $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2} dt$ est convergente.
3. $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}} dt$ est divergente.
4. $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

Théorème (Critère de comparaison).
Soit $f : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ (b pouvant être $+\infty$) deux fonctions continues (par morceaux).

On suppose que $\forall t \in [a, b[: \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$

1. *$\int_a^b g(t)dt$ est convergente $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ est convergente.*
2. *$\int_a^b f(t)dt$ est divergente $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ est divergente.*

Exemple. Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$
Pour tout $t \geq 0$ on a $0 < \frac{e^{-t}}{1+t^2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$.
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après le critère de Riemann.
Donc, par comparaison, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$ converge aussi.

Fonctions équivalentes

Définition. Soient f et g deux fonctions.
On dit que f est équivalente à g quand x tend vers a (avec a qui peut être $+\infty$ ou $-\infty$) si et seulement si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Cette propriété se note $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple. $\frac{1}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ $\qquad \sin(x) \underset{0}{\sim} x$ $\qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

Théorème (Critère d'équivalence).
Soit $f : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ (b pouvant être $+\infty$) deux fonctions continues (par morceaux).

$$\textit{On suppose que} \quad f \underset{b}{\sim} g$$

1. $\int_a^b g(t)dt$ *est convergente* $\Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt$ *est convergente.*
2. $\int_a^b g(t)dt$ *est divergente* $\Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt$ *est divergente.*

Exemple. Etudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+3}{t^4-3t+1}dt$.
On a $\frac{t^2+3}{t^4-3t+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^4} = \frac{1}{t^2}$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge d'après le critère de Riemann.
Donc, par équivalence, $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+3}{t^4-3t+1}dt$ converge aussi.

Chapitre 6

Transformée de Laplace

6.1 Signaux causaux

Définition (Fonction causale).
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est *causale* si et seulement si

$$\forall x < 0, \quad f(x) = 0.$$

Exemple. On note $\mathcal{U}$ la fonction de Heaviside ou fonction échelon, définie sur $\mathbb{R}$ par :

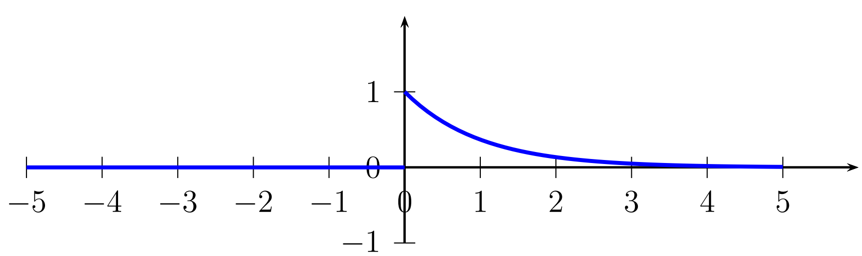
$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0, \\ 1 \text{ si } t \geq 0. \end{cases}$$

$\mathcal{U}$ est une fonction causale.

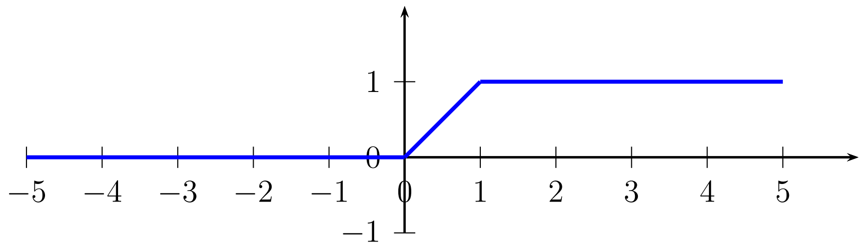
Remarque. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, la fonction g définie par $g(t) = f(t) \times \mathcal{U}(t)$ est causale.

Exemple.

1. $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$ est causale.



2. $f(t) = t\mathcal{U}(t) - (t-1)\mathcal{U}(t-1)$ est causale.



6.2 La transformée de Laplace

Définition (Transformée de Laplace).
Soit f une fonction causale. On appelle *transformée de Laplace* de f, la fonction notée $\mathcal{L}_f$ ou $\mathcal{L}(f)$ définie par :

$$\mathcal{L}_f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

$\mathcal{L}_f$ est définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge.

Remarque. Pour que $\mathcal{L}_f$ soit définie, il faut que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} = 0$.

Exemples (A connaître !).

1. Soit $f(t) = \mathcal{U}(t)$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p}$ et $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(p) > 0\}$.
   Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f(p) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\
&= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} - \frac{1}{-p} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

   Par ailleurs, pour que $\mathcal{L}_f(p)$ soit définie il faut que :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathcal{U}(t)e^{-pt} = \lim_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} |e^{-pt}| = \lim_{t\to+\infty} e^{-Re(p)t} = 0 \Leftrightarrow Re(p) > 0.$$

   et donc $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(p) > 0\}$.

2. Soit $f(t) = t\mathcal{U}(t)$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p^2}$ et $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(p) > 0\}$.
   Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f(p) &= \int_0^{+\infty} t\mathcal{U}(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} te^{-pt}dt \\
&= \left[t\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} \\
&= \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

   Par ailleurs, pour que $\mathcal{L}_f(p)$ soit définie il faut que :

$$\lim_{t\to+\infty} t\mathcal{U}(t)e^{-pt} = \lim_{t\to+\infty} te^{-pt} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0 \Leftrightarrow Re(p) > 0.$$

   et donc $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(p) > 0\}$.

3. Soit $f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$ où $a \in \mathbb{C}$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p+a}$ et $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(p) > -Re(a)\}$.
   Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}\mathcal{U}(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}dt \\
&= \frac{1}{p+a}.
\end{aligned}$$

   Par ailleurs, pour que $\mathcal{L}_f(p)$ soit définie il faut que :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-at}\mathcal{U}(t)e^{-pt} = \lim_{t\to+\infty} e^{-(p+a)t} = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow Re(p+a) > 0 \Leftrightarrow Re(p) > -Re(a).$$

   et donc $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(p) > -Re(a)\}$.

Remarque. On retient donc les 3 résultats suivants :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \Rightarrow \mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p}$$

$$f(t) = t\mathcal{U}(t) \Rightarrow \mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t) \Rightarrow \mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p+a}$$

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}$, la transformée de Laplace de $f(t) = t^n \mathcal{U}(t)$ est :*

$$\mathcal{L}_f(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Remarque. La preuve de la proposition précédente se fait par récurrence.

Exemple. Soit $f(t) = t^4 \mathcal{U}(t)$. Alors $\mathcal{L}_f(p) = \dfrac{4!}{p^5} = \dfrac{24}{p^5}$

6.3 Propriétés

6.3.1 Linéarité

Théorème. *Soient f et g deux fonctions causales.*

$$\mathcal{L}_{f+g}(p) = \mathcal{L}_f(p) + \mathcal{L}_g(p)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda f}(p) = \lambda \mathcal{L}_f(p), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\lambda f+g}(p) &= \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + g(t)) e^{-pt} dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt \\ &= \lambda \mathcal{L}_f(p) + \mathcal{L}_g(p) \end{aligned}$$

□

Exemples (A connaître !).

1. Soit $f(t) = (2t^3 - 3t^2 + t + 5)\mathcal{U}(t)$. On peut écrire : $f(t) = 2t^3\mathcal{U}(t) - 3t^2\mathcal{U}(t) + t\mathcal{U}(t) + 5\mathcal{U}(t)$. On a alors
$$\mathcal{L}_f(p) = 2\frac{3!}{p^4} - 3\frac{2!}{p^3} + \frac{1}{p^2} + 5\frac{1}{p} = \frac{12}{p^4} - \frac{6}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{5}{p}$$
2. Soit $f(t) = \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$.
En effet, par la formule d'Euler, on a : $f(t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\mathcal{U}(t)$, et comme $\mathcal{L}_{e^{-at}\mathcal{U}(t)}(p) = \frac{1}{p+a}$, on a :
$$\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2p}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

6.3.2 Multiplication par e^{-at}

Théorème. *Soit f_0 une fonction causale et soit $a \in \mathbb{C}$.*

$$\mathcal{L}_{f_0(t)e^{-at}} = \mathcal{L}_{f_0}(p+a)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f_0(t)e^{-at}}(p) &= \int_0^{+\infty} f_0(t)e^{-at}e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_0(t)e^{-(p+a)t}dt \\ &= \mathcal{L}_{f_0}(p+a)\end{aligned}$$

$\square$

Exemple.
Soit $f(t) = te^{-2t}\mathcal{U}(t)$. En posant $f_0(t) = t\mathcal{U}(t)$, on a $\mathcal{L}_{f_0}(p) = \frac{1}{p^2}$ et $f(t) = f_0(t)e^{-2t}$, donc

$$\mathcal{L}_f(p) = \mathcal{L}_{f_0}(p+2) = \frac{1}{(p+2)^2}$$

6.3.3 Dérivation temporelle

Théorème. *Soit f une fonction causale dérivable.*

$$\mathcal{L}_{f'}(p) = p\mathcal{L}_f(p) - f(0^+)$$

où $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$.

Démonstration. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{'(t)}(p) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt \\ &= \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -pf(t)e^{-pt}dt \\ &= 0 - f(0^+) + p\mathcal{L}_f(p)\end{aligned}$$

$\square$

Exemple (A connaître !).
Soit $f(t) = \sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{w}{p^2+\omega^2}$.

On a $f'(t) = \omega\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et $\mathcal{L}_{f'}(p) = \omega \times \frac{p}{p^2+\omega^2}$, donc

$$\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p}\left(\mathcal{L}_{f'}(p) + f(0^+)\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$.

6.3.4 Retard temporel

Théorème. *Soit f_0 une fonction causale et soit $\tau \in \mathbb{R}_+$. On pose $f(t) = f_0(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)$, alors :*

$$\mathcal{L}_f(p) = \mathcal{L}_{f_0}(p)e^{-p\tau}$$

Démonstration. On pose le changement de variable $x = t - \tau$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f_0(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)}(p) &= \int_0^{+\infty} f_0(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)e^{-pt}dt \\
&= \int_\tau^{+\infty} f_0(t-\tau)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} f_0(x)e^{-p(x+\tau)}dx \\
&= \int_0^{+\infty} f_0(x)e^{-px}e^{-p\tau}dx \\
&= \mathcal{L}_{f_0}(p)e^{-p\tau}
\end{aligned}$$

□

Exemple. Soit $f(t) = t\mathcal{U}(t-2)$. On pose $f(t) = f_0(t-2)$. On a alors :

$$f_0(t) = f(t+2) = (t+2)\mathcal{U}(t) = t\mathcal{U}(t) + 2\mathcal{U}(t)$$

d'où

$$\mathcal{L}_{f_0}(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}$$

donc

$$\mathcal{L}_f(p) = e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}\right).$$

6.4 Transformée inverse

Définition (TRANSFORMÉE INVERSE).
Soit F la transformée de Laplace d'une fonction causale f. On a alors : $F(p) = \mathcal{L}_f(p)$. On appelle *transformée de Laplace inverse* de F, notée $\mathcal{L}_F^{-1}$ ou $\mathcal{L}^{-1}(F)$ la fonction f.

La transformée de Laplace d'une fonction étant unique, nous allons travailler par identification.

Exemples.

1. Soit $F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p+2}$. En effectuant une D.E.S. on trouve :

$$F(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p+2)} = \frac{-2}{p+1} + \frac{3}{p+2}$$

On reconnaît la transformée de Laplace de

$$f(t) = \left(-2e^{-t} + 3e^{-2t}\right)\mathcal{U}(t).$$

2. Soit $F(p) = \frac{1}{p^2}e^{-3p}$. On pose $F_0(p) = \frac{1}{p^2}$. F_0 est la transformée de Laplace de $f_0(t) = t\mathcal{U}(t)$. La présence du terme e^{-3p} dans une transformée correspond à un retard de 3. On a donc

$$f(t) = f_0(t-3) = (t-3)\mathcal{U}(t-3).$$

3. Soit $F(p) = \frac{2}{p^2+4p+6}$. En utilisant la forme canonique, on trouve :

$$F(p) = \frac{2}{(p+2)^2+2} = F_0(p+2)$$

où $F_0(p) = \frac{2}{p^2+2}$. Or

$$F_0(p) = \frac{2}{p^2+2} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{p^2+(\sqrt{2})^2}$$

On reconnaît la transformée de Laplace de $f_0(t) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\mathcal{U}(t)$ et donc

$$f(t) = f_0(t)e^{-2t} = \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)e^{-2t}\mathcal{U}(t)$$

6.5 Application aux équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle de la forme :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \tag{6.1}$$

où $a \in \mathbb{R}^\star, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ et f est une fonction causale, une méthode consiste à :

1. appliquer la transformée de Laplace à l'équation (6.1)
2. déterminer $\mathcal{L}_y$, la transformée de Laplace de la solution y
3. appliquer la transformée inverse pour en déduire l'expression de y

Remarque. On utilise la propriété :

$$\mathcal{L}_{f'}(p) = p\mathcal{L}_f(p) - f(0^+)$$

On a également :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f''}(p) &= p\mathcal{L}'_f(p) - f'(0^+)\\ &= p\left(p\mathcal{L}_f(p) - f(0^+)\right) - f'(0^+)\\ &= p^2\mathcal{L}_f(p) - pf(0^+) - f'(0^+)\end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = e^{2t}\mathcal{U}(t) \quad (E) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace. On obtient :

$$\begin{aligned}
(E) &\Rightarrow \mathcal{L}_{y''}(p) + 4\mathcal{L}_{y'}(p) - 5\mathcal{L}_y = \mathcal{L}_{e^{2t}\mathcal{U}(t)}(p) \\
&\Rightarrow \left(p^2\mathcal{L}_y(p) - p - 2\right) + 4\left(p\mathcal{L}_y(p) - 1\right) - 5\mathcal{L}_y = \frac{1}{p-2} \\
&\Rightarrow \mathcal{L}_y(p)\left(p^2 + 4p - 5\right) = \frac{1}{p-2} + p + 6 = \frac{p^2+4p-11}{p-2} \\
&\Rightarrow \mathcal{L}_y(p) = \frac{p^2+4p-11}{(p-2)(p^2+4p-5)} = \frac{p^2+4p-11}{(p-2)(p-1)(p+5)} \\
&\Rightarrow \mathcal{L}_y(p) = \frac{1/7}{p-2} + \frac{1}{p-1} + \frac{-1/7}{p+5}
\end{aligned}$$

On reconnaît la transformée de Laplace de :

$$y(t) = \left(\frac{1}{7}e^{2t} + e^t - \frac{1}{7}e^{-5t}\right)\mathcal{U}(t)$$

6.6 Formulaire

f	$\mathcal{L}_f(p)$
$\mathcal{U}(t)$	
$t\mathcal{U}(t)$	
$t^n\mathcal{U}(t)$ avec $n \in \mathbb{N}$	
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$ avec $a \in \mathbb{C}$	
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ avec $\omega \in \mathbb{R}^+$	
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$ avec $a \in \mathbb{R}^+$	

f	$\mathcal{L}_f(p)$
$\lambda f + g$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$	
$e^{-at}f_0(t)$ avec $a \in \mathbb{C}$	
$f'(t)$	
$f_0(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)$	

Chapitre 7

Suites numériques

7.1 Vocabulaire et notations

Définition (Suite numérique).
On appelle *suite numérique* une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rrcl} f & : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & f(n) \end{array}$$

On note généralement :

$$\begin{array}{rrcl} u & : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u_n \end{array}$$

et on dit que u_n est le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition (Suite explicite/récurrente).

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *explicite*, si on a une expression de u_n en fonction de n : $u_n = f(n)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *récurrente* (d'ordre 1), si on a une expression de u_n en fonction du terme précédent : $u_n = f(u_{n-1})$

Exemple.

1. $u_n = 2n + 3$ est une suite explicite. Avec

$$u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3 \quad u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5 \quad u_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

2. $u_n = 2^n + 3$ est une suite explicite. Avec

$$u_0 = 2^0 + 3 = 4 \quad u_1 = 2^1 + 3 = 5 \quad u_2 = 2^2 + 3 = 7$$

3. $u_{n+1} = 2u_n + 3$ avec $u_0 = 3$ est une suite récurrente. Avec

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 2 \times u_0 + 3 = 9 \quad u_2 = 2 \times u_1 + 3 = 21$$

4. $u_{n+1} = 2^{u_n} + 3$ avec $u_0 = 3$ est une suite récurrente. Avec

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 2^{u_0} + 3 = 11 \quad u_2 = 2^{u_1} + 3 = 2051$$

Définition (SUITE ARITHMÉTIQUE).
On appelle *suite arithmétique* de raison $r \in \mathbb{R}$ une suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{(forme récurrente)} \quad \text{ou} \quad u_n = u_0 + nr \quad \text{(forme explicite)}$$

Exemple.

1. $u_{n+1} = u_n + 4$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$
2. $u_{n+1} = 3 - 2n$ est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 3$
3. $u_{n+1} = \frac{1}{3}n$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 0$

Définition (SUITE GÉOMÉTRIQUE).
On appelle *suite géométrique* de raison $q \in \mathbb{R}$ une suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad \text{(forme récurrente)} \quad \text{ou} \quad u_n = u_0 \times q^n \quad \text{(forme explicite)}$$

Exemple.

1. $u_{n+1} = 4u_n$ est une suite géométrique de raison $q = 4$
2. $u_{n+1} = 3 \times 2^n$ est une suite géométrique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$
3. $u_{n+1} = \frac{1}{3^n}$ est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$

7.2 Limite d'une suite

Définition (SUITE CONVERGENTE/DIVERGENTE).
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- *convergente* lorsque u_n admet une limite **finie** en $+\infty$, c'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$, où $c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- *divergente* lorsque la suite n'est pas convergente.

Exemple.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc la suite $u_n = 2^n$ est divergente.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$ donc la suite $u_n = 1 - \frac{2}{n}$ est convergente.
3. La suite $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite en $+\infty$ car elle oscille entre -1 et 1. Cette suite est donc divergente.

Remarque.
Lorsqu'on étudie la convergence d'une suite, c'est toujours en $+\infty$! Faire tendre un nombre entier n vers 0 (ou tout autre valeur finie) n'a aucun sens.

Théorème.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- *Si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge vers u_0.*
- *Si $r \neq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Théorème.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |q| < 1 \quad ou \quad u_0 = 0$$

Remarque.
Si $q \in \mathbb{R}$, $|q|$ désigne la valeur absolue de q. Si $q \in \mathbb{C}$, $|q|$ désigne le module de q.

Exemple.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{300} \times (1,1)^n = +\infty$ car $q = 1,1 > 1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $q = \frac{1}{2} < 1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $|q| = \frac{1}{5} < 1$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{3}\right)^n = 0$ car $|q| = \frac{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}{3} = \frac{2}{3} < 1$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = 0$ car $\frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n$ d'où $|q| = \frac{8}{9} < 1$

7.3 Somme des termes d'une suite

Définition.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $\sum_{n=1}^{N} u_n$ la somme des N premiers termes de la suite :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_N$$

Remarque.
Dans certains cas, la somme ne commencera pas à l'indice 1. La somme des termes d'indices compris entre n_0 et N se note $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$.

Exemple.

1. $\sum_{n=1}^{5} n = 1+2+3+4+5$
2. $\sum_{n=1}^{4} 2^n = 2^1+2^2+2^3+2^4$

Théorème.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- $\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{N}(\lambda a_n) = \lambda\sum_{n=1}^{N} a_n$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{N}\lambda = \lambda N$

Théorème.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_N = \sum_{k=0}^{N} u_k = (u_0+u_N)\times\frac{N+1}{2}$$

et plus généralement

$$\sum_{k=n_0}^{N} u_k = (u_{n_0}+u_N)\times\frac{N-n_0+1}{2}$$

Remarque.
Il ne faut pas retenir ces formules mais plutôt :

$$\text{Somme des termes d'une suite arithmétique} = (\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \frac{\text{nombre de termes}}{2}$$

Exemple.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{31} -4n = (0-124)\times\frac{32}{2} = -1984$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{16} 3+2n = (7+35)\times\frac{16-2+1}{2} = 315$

Théorème.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* q. *On a :*

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{k=0}^{N} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

et plus généralement

$$\sum_{k=n_0}^{N} u_k = u_{n_0} \times \frac{1 - q^{N-n_0+1}}{1 - q}$$

Remarque.
Il ne faut pas retenir ces formules mais plutôt :

$$\text{Somme des termes d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple.
$$\sum_{k=0}^{31} 3 \times 2^n = 3 \times \frac{1 - 2^{32}}{1 - 2} = 3(2^{32} - 1)$$