1 Calculs de limites - Continuité et dérivabilité en un point

1.1 Limites

1.1.1 Limites des fonctions usuelles

$f(x)$	Ensemble de définition	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
k où $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	k	k
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$, n pair	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$, n impair	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$	0	0
$\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	Pas défini	$+\infty$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	Pas de limite	Pas de limite
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	Pas de limite	Pas de limite
e^x	$\mathbb{R}$	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	Pas défini	$+\infty$

Autres limites à connaître

- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$

Proposition 1 (Croissances comparées).

- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

1.1.2 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions. a désigne ici un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\times g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Remarque.
Lors d'un calcul de limite, si la forme de la fonction ne permet pas de conclure, on parle de Forme Indéterminée *(F.I.). Les F.I. classiques sont :*

- ▷ $\infty - \infty$
- ▷ $\infty \times 0$
- ▷ $\dfrac{\infty}{\infty}$
- ▷ $\dfrac{0}{0}$
- ▷ 1^∞

Exemple 2.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = ?$

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, *mais* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ *F.I.* ☹
   Comme x^2+1 *et* x *sont des polynômes, on garde seulement le terme de plus haut degré, on alors :*

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad ☺$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = ?$

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, *mais* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ *F.I.* ☹
   En utilisant les croissances comparées, on sait que :

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \quad ☺$$

Proposition 3.
Soient f et g deux fonctions. a, b et c désignent ici des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$$

Exemple 4.

- ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x+1} = 0$
- ▷ $\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to 2} \ln(x-2) = -\infty$

1.2 Continuité en un point

Définition 5 (Limite à droite et limite à gauche).
Soit f une fonction et soit $a \in \mathbb{R}$.

- ▷ *On note* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *la* limite à droite *de f en a.*
- ▷ *On note* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *la* limite à gauche *de f en a.*

Exemple 6.

- ▷ *La limite à droite de* $\frac{1}{x}$ *en* 0 *est* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
- ▷ *La limite à gauche de* $\frac{1}{x}$ *en* 0 *est* $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Définition 7 (Continuité).
Soit f *une fonction définie sur l'ensemble* D_f *et soit* $a \in \mathbb{R}$.

- ▷ *Si* $a \in D_f$ *et* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$, *alors on dit que* f *est* continue *en* a.
- ▷ *Si* $a \notin D_f$ *et* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$, *alors on dit que* f *est* prolongeable par continuité *en* a *et on a* $f(a) = l$.

Exemple 8.

1. *Étudier la continuité de* $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \\ x^2+2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

   La fonction f *est définie sur* $D_f = \mathbb{R}$. *Les fonctions* $x \mapsto 2x+1$ *et* $x \mapsto x^2+2$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. *En* $1 \in D_f$, *on a :*

   $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x+1 = 3$$

   et

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2+2 = 3$$

   Donc la fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

2. *Étudier la continuité de* $g(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

   La fonction g *est définie sur* $D_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. *La fonction* g *est une fonction rationnelle (c'est à dire un quotient de fonctions polynomiales), elle est donc continue sur son ensemble de définition* D_g. *En* $1 \notin D_g$, *on a :*

   $$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+3 = 4$$

   et de la même manière,

   $$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+3 = 4$$

   Donc la fonction g *est prolongeable par continuité en* 1 *par* $g(1) = 4$.

1.3 Dérivabilité en un point

Définition 9 (Dérivabilité).
Soit f *une fonction définie sur l'ensemble* D_f *et soit* $a \in D_f$. *On dit que* f *est* dérivable *en* a *si et seulement si :*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d \in \mathbb{R}$$

La valeur de la limite d *est appelé* nombre dérivé *en* a *et se note* $f'(a)$.

Exemple 10.

1. *Étudier la dérivabilité de $f(x) = x^2$ en 1.*

   On a :
   $$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$
   Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

2. *Étudier la dérivabilité de $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \geq 1 \\ x^2+2 & si\ x < 1 \end{cases}$ en 1*

   On a :
   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1} = 2$$
   et
   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$
   Donc g est dérivable en 1 et $g'(x) = 2$.

3. *Étudier la continuité et la dérivabilité de $h(x) = |x|$ en 0.*

   On a $\lim_{x\to 0^+} |x| = 0$ et $\lim_{x\to 0^-} |x| = 0$ donc h est continue en 0.
   De plus, on a :
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} signe(x) = 1$$
   et
   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} signe(x) = -1$$
   Donc h n'est pas dérivable en 0.

Remarques.

1. *f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a*
2. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3. *$d(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$*
4. *$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a. En effet, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$*
5. *Si f n'est pas dérivable en a, alors $\mathcal{C}_f$ n'a pas de tangente en a, on observe une "cassure" sur la courbe*

Méthode : Calculer une limite grâce au nombre dérivé

On cherche la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = ?$$

Comme $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} x = 0$, il s'agit d'une F.I.

On cherche alors à utiliser le nombre dérivé en 0, c'est à dire :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

or $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ car $\sin(0) = 0$.
De plus, on sait que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée cos, d'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$$

Finalement, on trouve :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$