3 Systèmes linéaires et matrices - Méthode de Gauss

3.1 Résoudre un système à 2 équations et 2 inconnues avec la méthode de Gauss

On cherche à résoudre par la méthode de Gauss un système de la forme (avec $a_{1,1} \neq 0$) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y & = & b_1 & (1) \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y & = & b_2 & (2) \end{cases}$$

On commence par multiplier l'équation (1) par $a_{2,1}$ et l'équation (2) par $a_{1,1}$. Le système devient :

$$\begin{cases} a_{1,1}a_{2,1}x + a_{1,2}a_{2,1}y & = & b_1 a_{2,1} & (1') = a_{2,1}(1) \\ a_{1,1}a_{2,1}x + a_{1,1}a_{2,2}y & = & b_2 a_{1,1} & (2') = a_{1,1}(2) \end{cases}$$

Puis on soustrait $(1')$ à $(2')$, on obtient :

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y & = & b_1 & (1) \\ (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})y & = & b_2 a_{1,1} - b_1 a_{2,1} & (2'') = (2') - (1') \end{cases}$$

On obtient alors y, qu'on peut ensuite replacer dans l'équation (1) pour déterminer x.

Exemple 1.
Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + \ \ y & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \ \ y & = & 1 & (1) \\ 3x + 2y & = & 2 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y & = & 3 & (1') = 3 \times (1) \\ 6x + 4y & = & 4 & (2') = 2 \times (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y & = & 1 & (1) \\ y & = & 1 & (2'') = (2') - (1') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 & = & 1 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

3.2 Résoudre un système à 3 équations et 3 inconnues avec la méthode de Gauss

On cherche à résoudre par la méthode de Gauss un système de la forme (avec $a_{1,1} \neq 0$) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z & = & b_1 & (1) \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z & = & b_2 & (2) \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z & = & b_3 & (3) \end{cases}$$

On commence par multiplier (1) par $a_{2,1}$ et (2) par $a_{1,1}$. Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} a_{1,1}a_{2,1}x + a_{1,2}a_{2,1}y + a_{1,3}a_{2,1}z & = & b_1a_{2,1} & (1_a) = a_{2,1}(1) \\ a_{1,1}a_{2,1}x + a_{1,1}a_{2,2}y + a_{1,1}a_{2,3}z & = & b_2a_{1,1} & (2_a) = a_{1,1}(2) \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z & = & b_3 & (3) \end{cases}$$

On soustrait ensuite (1_a) à (2_a), on obtient :

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z & = & b_1 & (1) \\ (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})y + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1})z & = & b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1} & (2') = (2_a) - (1_a) \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z & = & b_3 & (3) \end{cases}$$

On recommence ensuite ces deux étapes mais cette fois en regardant les équations (1) et (3). On multiplie (1) par $a_{3,1}$ et (3) par $a_{1,1}$. On a :

$$\begin{cases} a_{1,1}a_{3,1}x + a_{1,2}a_{3,1}y + a_{1,3}a_{3,1}z & = & b_1a_{3,1} & (1_b) = a_{3,1}(1) \\ (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})y + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1})z & = & b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1} & (2') \\ a_{1,1}a_{3,1}x + a_{1,1}a_{3,2}y + a_{1,1}a_{3,3}z & = & b_3a_{1,1} & (3_b) = a_{1,1}(3) \end{cases}$$

Puis on soustrait (1_b) à (3_b), on obtient finalement :

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z & = & b_1 & (1) \\ (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})y + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1})z & = & b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1} & (2') \\ (a_{1,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{3,1})y + (a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1})z & = & b_3a_{1,1} - b_1a_{3,1} & (3') = (3_b) - (1_b) \end{cases}$$

On remarque alors que les équations $(2')$ et $(3')$ forment un système à 2 équations et 2 inconnues (y et z). On peut alors appliquer la méthode précédente pour déterminer z puis y. Enfin, en replaçant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve x.

Exemple 2.
Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ -4x + 3y - z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x - y + z &= 1 \quad (1) \\ -4x + 3y - z &= 2 \quad (2) \\ 2x - y + z &= 2 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 1 \quad (1) \\ -4x + 3y - z - (-4x + 4y - 4z) &= 2 - (-4) \quad (2') = 1(2) - (-4)(1) \\ 2x - y + z - (2x - 2y + 2z) &= 2 - 2 \quad (3') = 1(3) - 2(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 1 \quad (1) \\ -1y + 3z &= 6 \quad (2') \\ 1y - z &= 0 \quad (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 1 \quad (1) \\ -y + 3z &= 6 \quad (2') \\ -y + z - (-y + 3z) &= -0 - 6 \quad (3'') = -1(3') - 1(2') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 1 \quad (1) \\ -y + 3z &= 6 \quad (2') \\ -2z &= -6 \quad (3'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3 &= 1 \\ -y + 9 &= 6 \\ z &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + 3 &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= 3 \end{cases}$$

3.3 Triangulariser une matrice avec la méthode de Gauss

De manière plus générale, la méthode de Gauss permet de transformer toute matrice inversible en une matrice triangulaire supérieure. Ceci peut être utile, par exemple, pour calculer le déterminant.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible de taille n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Quitte à permuter les lignes, on peut supposer que $a_{1,1} \neq 0$. En retranchant aux $n-1$ dernières lignes un multiple de la première ligne, on obtient une matrice de la forme :

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

En appliquant maintenant ce procédé à la matrice A', on obtient une matrice de la forme :

$$B' = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{1,1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a'_{1,1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A'' & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

Enfin, en réitérant l'opération encore $n-3$ fois, on obtient une matrice triangulaire supérieure.

Exemple 3.

Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *en utilisant la méthode de Gauss.*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{-3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1 \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{vmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - \frac{-4}{6}L_3$$

$$= -2 \times 2 \times 6 \times \frac{17}{3} = -136$$