Mathématiques

Semestre 2

Travaux Dirigés Mathématiques

Année 2022-2023

Nom :
Prénom :
Groupe :

L'usage régulier d'une calculatrice est nocif pour la santé mentale de son utilisteur.

N. Brissard

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions réciproques

Exercice 1 ***Ensemble image***
On considère la fonction $f(t) = (t-1)^2 - 2$

1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]2, 3[$.
2. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-2, 0]$.
3. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-1, 3]$.
4. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-\infty, 2]$.

Exercice 2 ***Fonctions bijectives***

1. La fonction $t \mapsto t - 1 + e^{-t}$ est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? De $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$?
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{2t+1}{t-4}$ est-elle bijective de $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ dans $\mathbb{R}$?
3. Déterminer deux ensembles E et F tels que la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ soit bijective de E dans F.

Exercice 3

1. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $[0; 1]$ dans $[-2; 3]$.
2. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $[1; +\infty[$ dans $[-2; +\infty[$.
3. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 2[$.

Exercice 4 ***Théorème de la bijection***
Démontrer que l'équation $x^3 + 3x - 5 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$. Donner une méthode pour trouver une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution.

Exercice 5 ***Fonctions réciproques***
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.
   (a) Montrer que f est une bijection de $]-1, +\infty[$ dans un ensemble que l'on déterminera.
   (b) Déterminer la fonction réciproque de la fonction f.
2. Vérifier que les fonctions $g(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ et $h(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ sont réciproques l'une de l'autre.

Exercice 6

1. Montrer que la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

   est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$.

2. Déterminer sa fonction réciproque.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique.

Exercice 7

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f : [-4, +\infty[& \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \sqrt{2x+8} + 3 \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection de $[-4, +\infty[$ dans un ensemble F que l'on déterminera.
2. Déterminer la fonction réciproque de f.
3. Sur le graphique ci-dessous nous avons tracé la courbe représentative de f. Tracer la courbe de la réciproque de f.

Exercice 8 ***arccos, arcsin, arctan***

Calculer :

1. $\arccos(-0.5)$
2. $\arcsin(-1)$
3. $\arccos(\frac{1}{2})$
4. $\arctan(-1)$
5. $\arctan(\sqrt{3})$
6. $\arccos\big(\cos\big(\frac{3\pi}{4}\big)\big)$
7. $\arccos\big(\cos\big(\frac{7\pi}{6}\big)\big)$
8. $\arccos\big(\cos\big(\frac{31\pi}{4}\big)\big)$
9. $\arcsin\big(\sin\big(\frac{\pi}{3}\big)\big)$
10. $\arcsin\big(\sin\big(-\frac{4\pi}{3}\big)\big)$
11. $\arcsin\big(\sin\big(\frac{17\pi}{6}\big)\big)$

Exercice 9

Calculer :

1. $\arccos\big(\sin\big(\frac{3\pi}{2}\big)\big)$
2. $\arcsin\big(\cos\big(\frac{5\pi}{3}\big)\big)$
3. $\arccos\big(\sin\big(-\frac{\pi}{4}\big)\big)$
4. $\arcsin\big(\cos\big(\frac{\pi}{5}\big)\big)$
5. $\arctan\big(\tan\big(\frac{29\pi}{3}\big)\big)$
6. $\arctan\big(\tan\big(\frac{4\pi}{3}\big)\big)$
7. $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t)$
8. $\lim_{t\to-\infty} \arctan(t)$
9. $\lim_{t\to+\infty} \arccos(t)$

Exercice 10

1. Soit $x \in [-1, 1]$, simplifier les expressions :

   (a) $\sin(\arcsin(x))$, (b) $\cos(\arccos(x))$, (c) $\cos(\arcsin(x))$, (d) $\sin(\arccos(x))$.

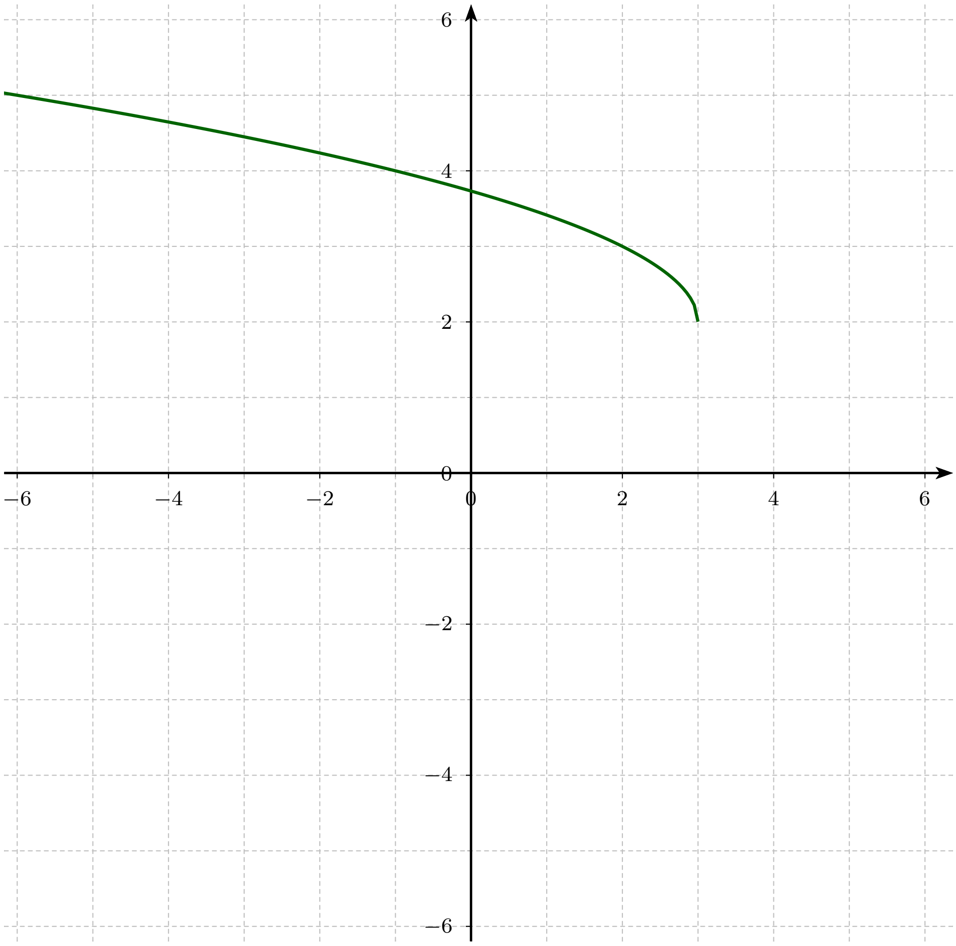
2. Soit $f(x) = \arccos(\cos(x))$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer la période de f.
   (c) Déterminer la parité de f.
   (d) Tracer la courbe représentative de f
3. Montrer que, $\forall x \in [-1, 1]$,
$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Compléments

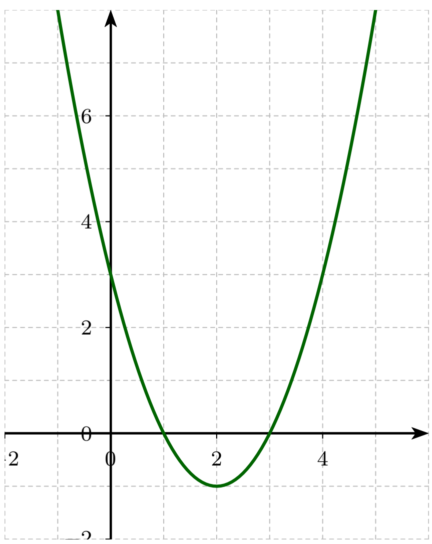
Exercice 11 ***Extrait d'interro 2022***

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1-3x} - 2$

1. Déterminer D, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est bijective de D dans un ensemble E à déterminer.
3. Déterminer la fonction réciproque de f.
4. Sur le graphique ci-dessous nous avons tracé la courbe représentative de f. Tracer la courbe de la réciproque de f.



Exercice 12 ***Extrait d'interro 2022***
Soit la fonction $f(x) = (x-2)^2 - 1$ dont le graphe est :



Déterminer, sans justiifier :

1. $f(\mathbb{R}) =$
2. $f([3;4[) =$
3. $f(]0;3[) =$

Exercice 13 ***Extrait d'interro 2022***
Déterminer sans justifier

1. $\arccos(-0,5) =$
2. $\arcsin(-0,5) =$
3. $\arctan(-1) =$
4. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$
5. $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

Exercice 14 ***Extrait de DS 2020***
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que f est bijective de E dans F avec E et F deux ensembles à déterminer.
2. On pose $g(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Vérifier que g est la réciproque de f.
3. Que peut-on en déduire sur les courbes représentatives de f et de g ?

Exercice 15 ***Extrait de DS 2020***
Déterminer les valeurs suivantes :

1. $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right) =$
2. $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)\right) =$
3. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) =$
4. $\arcsin\left(\cos\left(\dfrac{29\pi}{3}\right)\right) =$
5. $\arccos\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)\right) =$

Exercice 16 ***Extrait de DS 2019***
On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : &]2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection de E_1 sur F_1, avec E_1 et F_1 deux ensembles à déterminer.
2. Soit
$$f^{-1} \ : \ E_2 \ \to \ F_2$$
   (a) Expliquer pourquoi f admet une application réciproque f^{-1}.
   (b) Déterminer les ensembles de départ E_2 et d'arrivée et F_2 de f^{-1}.
   (c) Déterminer l'application réciproque de f.
3. Déterminer g tel que $g \circ f(x) = \ln(x)$

Exercice 17 ***Extrait de DS 2019***
Calculer :

1. $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$
2. $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\arcsin\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\arccos\left(\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)\right)$
5. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{28\pi}{3}\right)\right)$
6. $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$

Exercice 18 ***Extrait de DS 2018***
Soit la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \left]\frac{2}{5};+\infty\right[& \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1}{5x-2}\right). \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$.

2. Déterminer l'ensemble E pour que f soit bijective de $\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$ dans E.
3. Déterminer f^{-1}, la fonction réciproque de f.
4. Déterminer l'ensemble F pour que f^{-1} soit bijective de $\mathbb{R}$ dans F.

Exercice 19 ***Extrait de DS 2015***

1. Donner un exemple de fonction bijective de $[2,+\infty[$ dans $]-\infty,3]$.
2. Donner un exemple de fonction non bijective définie sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un exemple de fonction bijective telle que $f(x)=f^{-1}(x)$.

Chapitre 2

Systèmes linéaires et matrices

Exercice 1 ***Méthode de Gauss***
Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a)\begin{cases}2x-y=3\\x+y=-1\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x+5y=-9\\x+7y=-15\end{cases}\quad c)\begin{cases}2x+y=3\\-4x-2y=5\end{cases}\quad d)\begin{cases}4x+2y=-6\\2x+y=-3\end{cases}$$

Exercice 2
Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a)\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\\3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=7\end{cases}\quad b)\begin{cases}\frac{3}{y-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{3}{4}\\\frac{5}{y-1}+\frac{3}{x+2}=\frac{29}{12}.\end{cases}\quad c)\begin{cases}\ln\left(x^3y\right)=2\\\ln\left(\frac{x}{y^2}\right)=3\end{cases}$$

Exercice 3
Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a)\begin{cases}x+2y+z=0\\x-2y+2z=11\\-x+6y-5z=-28.\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x+7y-3z=8\\-3x+y+z=-4\\x-8y+2z=4.\end{cases}\quad c)\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y-z=5\\-x+2y+2z=0\end{cases}$$

Exercice 4 ***Écriture matricielle d'un système***
On considère le système suivant

$$(S)\qquad\left\{\begin{array}{rcrcrl}x&-&y&+&z=&1\\-4x&+&3y&-&z=&2\\2x&-&y&+&z=&2\end{array}\right.$$

1. Écrire le système (S) sous la forme $AX=B$, avec $A\in\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer a, b et c pour que la matrice $M=\begin{pmatrix}-1&0&a\\b&\frac{1}{2}&c\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ soit la matrice inverse de A.
3. Résoudre le système (S) matriciellement, en utilisant la matrice M.

Exercice 5 ***Extrait de DS 2017***

$$(S)\begin{cases} \sqrt{3}x & -\sqrt{3}y & & = 6 \\ x & +y & -2z & = 0 \\ \sqrt{2}x & +\sqrt{2}y & +\sqrt{2}z & = 12 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. (a) Donner l'expression de ${}^tA$, la transposée de A.

   (b) Calculer ${}^tAA$ puis en déduire que $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
3. Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

Exercice 6 ***Déterminants***

Calculer le déterminant puis dire si les matrices suivantes sont inversibles :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 7 ***Résolution de système avec la matrice inverse***

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que la matrice ne soit pas inversible.
2. On pose $a = -4$. Déterminer A^{-1}.
3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} -4x + 2y + 3z = 8 \\ -x + 2y - z = 4 \\ -3x + 2y + z = -4 \end{cases}$$

Exercice 8 ***Matrice inverse***

Déterminer les matrices inverses des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -10 \\ -5 & 8 & 17 \end{pmatrix}$

Exercice 9

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

   (a) Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles ce système admet une solution unique.

   (b) Résoudre alors ce système en fonction de a.

2. Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z+t=7 \\ 2x+3y+3z+2t=14 \\ -2x-y+2t=2 \\ -x-z+t=-1 \end{cases}$$

Compléments

Exercice 10 ***Extrait de DS 2022***

1. Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

(a)
$$\begin{cases} 3x+y &= 13 \\ 2x-3y &= -6 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x+y-3z &= -10 \\ 3x+2y+z &= -1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 5x+4y &= 6 \\ 25x+20y &= 30 \end{cases}$$

2. Soient les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & c \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer a, b et c pour que B soit l'inverse de A.

(b) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 4x+4z=0 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$$

Exercice 11 ***Extrait de DS 2022***

1. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice inverse de A et de B.
3. Donner un exemple de matrice de taille 2 non inversible.

Exercice 12 ***Extrait de DS 2022*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et en déduire la matrice inverse de A.

2. Déterminer la matrice B telle que

$$B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad b_{i,j} = 3^{j-i}$$

3. Soient les matrices C, D et E suivantes

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Indiquer les calculs qui sont possibles et ceux qui sont impossibles (on ne demande pas de faire les calculs) : $C + E$, $C \times E$, $E \times C$, et C^2.

4. Donner un exemple de matrice triangulaire supérieure.
5. Donner un exemple de matrice F de taille 3×3 telle que ${}^tF = F$.
6. Donner l'écriture matricielle du système (on ne demande pas de résoudre) :

$$\begin{cases} 2x & -y & = 3 \\ 3x & +y & = 2 \end{cases}$$

Exercice 13 ***Extrait de DS 2021*** Les questions suivantes sont indépendantes

1. Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 2x - 2y - 2z = 2 \\ -x + 2y + 5z = 6. \end{cases}$$

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A est inversible.
   (b) Déterminer la matrice inverse de A par la méthode de votre choix.
   (c) Résoudre le système suivant en utilisant A^{-1} :

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -3x + 8y = 2 \end{cases}$$

Exercice 14 ***Extrait de DS 2020***
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les déterminants de A, B et C
2. Le système suivant admet t-il une unique solution ? (on ne demande pas de le résoudre)

$$(S) \quad \begin{cases} 17x & - & 2y & = & 1 \\ 3x & + & 8y & = & 2 \end{cases}$$

3. La matrice B est elle inversible ? Si oui, déterminer B^{-1}.

Exercice 15 ***Extrait de DS 2019*** Les questions suivantes sont indépendants :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles l'inverse l'une de l'autre ?

2. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice D telle que $C \times D$ et $C + D$ existent ?

3. Soit la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer a, b et c pour que $F = \begin{pmatrix} a & -2 & 5 \\ -3 & b & 2 \\ 4 & c & -2 \end{pmatrix}$ soit l'inverse de E.

   (b) En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \quad y + z = 1 \\ \quad 2x + 5z = 1 \\ x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$

Chapitre 3

Polynômes

Exercice 1 ***Degré de polynômes***
Déterminer le degré des polynômes suivants :

1. $P_1(X) = (X-1)^2(X+1)$
2. $P_2(X) = (X-1)^2(X^2+1)^2$
3. $P_3(X) = X(X^3+1)^2(X^2+2X+1)$
4. $P_4(X) = X^2(X^2+2) + X^4 + 2X + 1$
5. $P_5(X) = X(X^3+1)^2 - X^7 + 2X + 1$
6. $P_6(X) = P_1(P_2(X))$
7. $P_7(X) = P_1(X)P_2(X)$
8. $P_8(X) = P_1(X) + P_2(X)$

Exercice 2 ***Factorisation dans*** $\mathbb{R}$
Factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^2 - 2X - 3$
2. $P_2(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$
3. $P_3(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$
4. $P_4(X) = X^3 + 2X^2 - 4X - 5$
5. $P_5(X) = X^4 - 64$
6. $P_6(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 4$
7. $P_7(X) = (X-i)(X+i)(X-1+i)(X-1-i)$

Exercice 3 ***Factorisation dans*** $\mathbb{C}$
Soit $P(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$.

1. Montrer que i est racine de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 ***Factorisation dans*** $\mathbb{C}$
Soit $P(X) = X^3 - (4-3i)X^2 - 6iX + (7-9i)$.

1. Montrer que P admet une racine réelle r si et seulement si r est solution de $r^3 - 4r^2 + 7 = 0$ et de $3r^2 - 6r - 9 = 0$.
2. P admet-il une racine réelle ?

Exercice 5 ***Factorisation dans*** $\mathbb{C}$
Soit $P(X) = X^3 - (2-2i)X^2 + (2-3i)X + (5-5i)$.

1. Trouver une racine réelle de P.
2. Les racines complexes de P sont-elles conjuguées ? Pourquoi ?
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 ***Factorisation dans $\mathbb{C}$***
Posons $P(X) = X^3 + (-3-4i)X^2 + (-3+8i)X + 5$.

1. Vérifier que i est racine de P. En déduire un polynôme P_1 tel que $P(X) = (X-i)P_1(X)$.
2. Trouver les racines complexes z_1 et z_2 de P_1 et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Soit Q un polynôme de degré 4 à coefficients réels qui admet z_1 et z_2 comme racines. Ecrire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 ***Racines multiples***

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 16X + 20$ admet le nombre 2 comme racine de multiplicité 2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2$. On remarque que $P(1) = 0$: déterminer la multiplicité de 1. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer a pour que le polynôme $P(X) = 2X^2 - X + a - 2$ admettent une racine de multiplicité 2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8

1. Donner un polynôme P_1 à coefficients réels qui admet $1+i$ et 2 comme racines.
2. Donner un polynôme P_2 de degré 4 qui admet 2 comme racine double et -1 comme racine simple.
3. Donner un exemple de polynôme vérifiant ces 4 conditions suivantes :
   - -2 est racine simple de P
   - 1+i est racine de multiplicité 2 de P
   - le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$ est nul
   - P est à coefficient réels

Exercice 9 ***Factorisation dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$***
On considère le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 4X + 6$.

1. Montrer que $1+i$ est une racine de P.
2. Le polynôme P admet-elle une autre racine complexe ? Si oui, que vaut-elle ?
3. Effectuer la division euclidienne de P par $X + 3$
4. (a) Les racines de P dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$.
   (b) La factorisation de P dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 ***Divisions Euclidiennes***
Effectuer la division euclidienne de :

1. $P(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 1$ par $D(X) = X^2 + X - 1$.
2. $P(X) = X^5 + X + 1$ par $D(X) = X^3 - X^2 + 1$.
3. $P(X) = X^3 + 3X - 2i$ par $D(X) = X - i$.

Exercice 11 ***Racines multiples - Division Euclidienne***
Soit le polynôme $P(X) = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$, où a et b sont deux réels.

1. Déterminer a et b pour que 1 soit racine de multiplicité $k \geq 2$ du polynôme P.
   Désormais, a et b auront ces valeurs.
2. Quel est alors l'ordre de multiplicité k de 1 comme racine de P ?
3. Vérifier ce résultat en effectuant la division euclidienne de P par $(X-1)^k$ pour les valeurs a et b trouvées. Préciser la valeur du quotient Q.

Exercice 12 ***Extrait de DS 2019***

On souhaite étudier la propriété suivante :

Le produit de 4 nombres entiers qui se suivent auquel on ajoute 1 est toujours le carré d'un nombre entier ($\star$)

Exemple : $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2$

1. Soient N un nombre entier et $P(N)$ le résultat du produit de N par les 3 entiers suivants auquel on ajoute 1. Montrer que
$$P(N) = N^4 + 6N^3 + 11N^2 + 6N + 1$$
2. Poser la division euclidienne de P par $N^2 + 3N + 1$.
3. Dire si la propriété ($\star$) est vraie ou fausse puis donner la valeur de $\sqrt{15 \times 16 \times 17 \times 18 + 1}$.

Exercice 13 ***Interpolation polynômiale***

1. Soient les matrices A et B :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \alpha \\ \beta & 4 & -1.5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer α et β pour que B soit l'inverse de A.
2. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 12 \end{cases}$$
3. Déterminer le polynôme P sachant que : P est de degré 2, $P(1) = 2$, $P(2) = 6$ et $P(3) = 12$.

Exercice 14 ***D.E.S.***

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

1. $F_1(X) = \dfrac{4}{(X-5)(X+3)}$
2. $F_2(X) = \dfrac{X^2+1}{X(X-2)(X+4)}$
3. $F_3(X) = \dfrac{X^3}{X^2+2X-15}$

Exercice 15 ***D.E.S.***

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

1. $F_1(X) = \dfrac{X^2}{(X-1)^2(X+4)}$
2. $F_2(X) = \dfrac{X^2+1}{X^4-2X^3}$
3. $F_3(X) = \dfrac{1}{X^2(X+2)^2}$

Exercice 16 ***D.E.S.***

Décomposer en en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

1. $F_1(X) = \dfrac{3X+2}{(X^2+1)(X-2)}$
2. $F_2(X) = \dfrac{X^3+2X}{(X^2+X+1)(X+1)(X-8)}$
3. $F_3(X) = \dfrac{X^4}{X^3-2X^2+X-2}$

Exercice 17 ***Extrait de DS 2018***

1. Donnez **la forme** de la décomposition en élément simples (DES) dans $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :

   (a) $F_1(X) = \dfrac{X^3}{(1+X)(X-2)}$ (b) $F_2(X) = \dfrac{2}{X^3+X}$ (c) $F_3(X) = \dfrac{2X+1}{X^3(X^2+1)}$

2. Calculez les constantes dans la DES de F_1 et F_2.

Compléments

Exercice 18 ***Extrait de DS 2022*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient $P(X) = X^3 + X + 1$ et $Q(X) = X^4 - 3X^3 + 2X$.
   Donner le degré de $P \times Q$ et $P \circ Q$.
2. Soit
$$P(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 4X + 8$$
   (a) Montrer que 2 est racine de P.
   (b) Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 3X^2 - 4$ par $X^2 + 4$.
   (c) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.
3. Donner un exemple de polynôme vérifiant toutes les conditions suivantes :
   - P est à coefficient réels
   - $2 + i$ est racine simple de P
   - -3 est racine de multiplicité 3 de P
   - P est de degré 6

Exercice 19 ***Extrait de DS 2022*** On considère les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X+2}{(X-1)(X-2)} \quad F_2(X) = \frac{X+2}{(X+1)^2(X-2)}$$

$$F_3(X) = \frac{2X^2+1}{(X^2+1)(X-2)} \quad F_4(X) = \frac{X^6+X-1}{X^5-4X^4+3X^3}$$

1. Faire la DES de F_1.
2. Donner la forme de la DES de F_2 (on ne demande pas la valeur des coefficients).
3. Faire la DES de F_3.
4. Donner la forme de la DES de F_4 (on ne demande pas la valeur des coefficients).

Exercice 20 ***Extrait de DS 2021*** Soit le polynôme $P(X) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 28x^2 + 36x + 16$

1. Montrer que -1 est racine double pour P.
2. Calculer $P(2i)$.
3. Poser la division euclidienne de P par $X + 4$.
4. Déduire, des questions précédentes, la factorisation de P dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Exercice 21 ***Extrait de DS 2021*** On considère les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X-5}{(X+2)(X-3)} \qquad F_2(X) = \frac{X^2}{(X-1)(X^2+3X-4)} \qquad F_3(X) = \frac{X^3}{X^3-1}$$

1. Donner **la forme** de la D.E.S de F_1 (on ne demande pas la valeur des coefficients).

2. Donner **la forme** de la D.E.S de F_2 (on ne demande pas la valeur des coefficients).
3. Déterminer la D.E.S de F_3 (il faut calculer les valeurs des coefficients !).

Exercice 22 ***Extrait de DS 2021*** On considère les polynômes suivants

$$P(X) = X^7 - 3X^3 + 1 \qquad Q(X) = X^3 + 4X^2 - 2 \qquad R(X) = X^2 - 6X + 1$$

1. Déterminer le degré des polynômes suivants $P \times Q$, $P \circ R$ et $P + Q + R$.
2. Déterminer le degré du polynôme $T(X) = Q(X)(X + 3) - (X^2 - 1)R(X)$.

Exercice 23 ***Extrait de DS 2019*** Soit la fonction $F(X) = \dfrac{X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X - 1}{X^3 + 2X^2 + X}$.

1. Déterminer les polynômes $E(X)$ et $D(X)$ tels que $F(X) = E(X) + \dfrac{D(X)}{X^3 + 2X^2 + X}$ avec $deg(D) < 3$.
2. Factoriser le polynôme $Q(X) = X^3 + 2X^2 + X$.
3. Donner la forme de la D.E.S. de F.
4. Donner la décomposition en éléments simples de F.

Exercice 24 ***Extrait de DS 2019*** Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

1. Il n'existe pas de polynôme de degré 5 à coefficients réels qui admette 3 comme racine triple et i comme racine double.
2. Le reste de la division euclidienne de $P(X) = X^6 - 3X^2 - 3$ par $X - 1$ est nul.
3. Soit P un polynôme. Si $P'(3) = 0$ alors 3 est racine de P de multiplicité au moins 2.
4. Il existe un polynôme P tel que $P(X^3 + 1) = X^3 P(X)$.
5. La forme de la D.E.S. de $F(X) = \dfrac{2X - 7}{(X + 1)(X^2 + 3X + 1)}$ est $F(X) = \dfrac{a}{X + 1} + \dfrac{b}{X^2 + 3X + 1}$

Exercice 25 ***Extrait de DS 2018*** Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

1. Montrez que -1 est racine double de P.
2. Effectuez la division euclidienne de P par $X - i$.
3. Sans poser la division euclidienne de P par $X + i$, justifiez pourquoi le reste est forcément nul.
4. Déterminez la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 26 ***Extrait de DS 2017*** Considérons un polynôme P défini par

$$P(X) = 2X^5 - 3X^4 - 8X^3 + 5X^2 + \alpha X + \beta$$

1. Déterminer les valeurs de α et β pour que 2 et -1 soient racines de P.
   Pour les questions suivantes on remplacera α et β par les valeurs obtenues à la quetion 1.
2. Montrer que les racines 2 et -1 sont de multiplicité 2.
3. Sachant que $(X - 2)^2(X + 1)^2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$, poser la division euclidienne de P par $(X - 2)^2(X + 1)^2$.
4. En déduire la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 4

Calcul intégral - Partie 1

Exercice 1 ***Calcul de surface***

1. On considère les 3 fonctions suivantes :

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty; 0[\\ 2 \text{ si } t \in [0, 3[\\ 0 \text{ si } t \in [3, +\infty[\end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty; -1[\\ 2 \text{ si } t \in [-1, 2[\\ -2 \text{ si } t \in [2, 3[\\ 0 \text{ si } t \in [3, +\infty[\end{cases} \qquad f_3(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty; -1[\\ t+1 \text{ si } t \in [-1, 0[\\ -t+1 \text{ si } t \in [0, 1[\\ 0 \text{ si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Calculer $I_1 = \displaystyle\int_{-10}^{10} f_1(t)dt$, $I_2 = \displaystyle\int_{-10}^{10} f_2(t)dt$ et $I_3 = \displaystyle\int_{-10}^{10} f_3(t)dt$,

2. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} |t-3| \, \mathrm{d}t$

Exercice 2 ***Propriétés graphiques***

Dire si les égalités sont vraies ou fausses :

1. $\displaystyle\int_{-2\pi}^{\pi} |\sin(t)|dt = 3\int_{0}^{\pi} \sin(t)dt$,
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5(3t)dt = 0$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 2 + \sin(t)dt = 2 + \int_{0}^{\pi} \sin(t)dt$.
4. $\displaystyle\int_{-\pi\sqrt{3}}^{\pi\sqrt{3}} 14t^7 + 23t^5 - t^3 - \frac{4t}{7} \, \mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{-2}^{2} t^3 - 3t + 1dt = 0$

Exercice 3 ***Calcul de surface***

Tracer les courbes d'équations $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{4}$ et $y = \dfrac{2}{x^2}$ sur le quadrant $x > 0$, $y > 0$. Calculer l'aire de la surface centrale délimitée par ces 3 courbes.

Exercice 4 ***Calculs de primitives***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2t^3 + 5t^2 - 4t + 1 \, \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{1}^{2} t(t^2+1)^2 \, \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{t^3} \, \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{t}{\sqrt{t^2+3}} - 2t \, \mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} \, \mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3}{2t-1} \, \mathrm{d}t$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3t^2+2t+1}{t^3+t^2+t+2}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^1 t^2 e^{t^3}\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{e^{\cos t}}\,\mathrm{d}t$
13. $\displaystyle\int_0^1 2^t\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4t^2+1}\,\mathrm{d}t$
15. $\displaystyle\int_{-2}^2 |t^2-4|\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)\ln(t)}{e^{7\cos t}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 5 ***Attention à la variable !***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^e \frac{t}{x}dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^e \frac{t}{x}dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 e^{\frac{t}{x}}\,dt$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)dx$

Exercice 6 ***Linéarisation***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\mathrm{d}t$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos(3t)\mathrm{d}t$

Exercice 7 ***I.P.P.***
A l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties, calculer :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 (1+t)e^{2t}\mathrm{d}t$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$
3. $K = \displaystyle\int_0^1 (1+4t)\ln(2t+1)\,\mathrm{d}t$
4. $L = \displaystyle\int_1^e \ln(t)\mathrm{d}t$
5. $M = \displaystyle\int_0^1 2t\arctan(t)\mathrm{d}t$
6. $N = \displaystyle\int_0^{\pi} e^t\sin(t)\mathrm{d}t$

Exercice 8 ***I.P.P.***

1. Calculer une primitive de $f(t) = \dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t(t^2-1)}\mathrm{d}t$.
3. Calculer $J = \displaystyle\int_2^3 \frac{2t\ln t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 9 ***D.E.S***
On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{t^2+1}{(t+1)(t^2+4)}dt$

1. Déterminer une primitive de $f(t) = \dfrac{1}{t^2+4}$.

2. Déterminer une primitive de $g(t) = \dfrac{t-1}{t^2+4}$.
3. Montrer que
$$\frac{t^2+1}{(t+1)(t^2+4)} = \frac{3(t-1)}{5(t^2+4)} + \frac{2}{5(t+1)}.$$
4. Calculer I.

Exercice 10 ***D.E.S***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt$
2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{(t+1)(t^2-4)} dt$
3. $K = \displaystyle\int_4^5 \frac{t^3+2}{t^2-5t+6} dt$
4. $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{3t+1}{(t+1)^2} dt$

Exercice 11 ***Changement de variable***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^3(t)\mathrm{d}t$ en posant $u = \cos(t)$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ en posant $t = \cos(x)$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$ en posant $t = \mathrm{e}^u$

Exercice 12 ***Changement de variable***
On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\mathrm{d}t$

1. On pose $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$. Exprimer t en fonction de u.
2. En déduire une relation entre dt et du.
3. Donner l'expression de l'intégrale I en fonction de la variable u.
4. Calculer I.

Exercice 13
On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)} dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{1+2\sin(t)} dt$.

1. Calculer I.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire J.

Compléments

Exercice 14 ***Extrait de DS 2022***

1. Déterminer un primitive des fonctions suivantes :

(a) $f_1(t) = 3\sin(5t+4)\cos^3(5t+4)$

(b) $f_2(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

(c) $f_3(t) = \frac{4t+6}{(t^2+3t+2)^3}$

(d) $f_4(t) = \frac{2}{9+4t^2}$

2. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2x}{3t-1}dt$

(b) $I_2 = \int_{-10}^{10} t^2\sin(t^3) + 1dt$

(c) $I_3 = \int_{-1}^{0} te^{3t+1}dt$

(d) $I_4 = \int_{0}^{2\pi} \sin(t)\cos(2t)dt$

Exercice 15 ***Extrait de DS 2021***
Les questions suivantes sont indépendantes

1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

(a) $f_1(x) = \cos^2(x)\sin(x)$

(b) $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{e^x}{-2+e^x}$

(d) $f_4(x) = \dfrac{x^4}{3} + 2x^3 + 1$

(e) $f_5(x) = \sin(3x+\pi)$

(f) $f_6(x) = x\sqrt{1+x^2}$

2. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $g_1(x) = \displaystyle\int_0^1 te^{2t+1}dt$

(b) $g_2(x) = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{2x+1}{x^2-1}dt$

(c) $g_3(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\sin(3x)dx$

(d) $g_4(x) = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}dx$ (on pourra effectuer le changement de variable $x = 1-t$)

Exercice 16 ***Extrait de DS 2019*** Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4(x)\cos(x)\mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\mathrm{d}x$
4. $L = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\mathrm{d}x$
5. $M = \displaystyle\int_0^2 |t^2-3t+2|\mathrm{d}t$
6. $N = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$
7. $P = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$
(on pourra effectuer le changement de variable $x = \sin(u)$)

Exercice 17 ***Extrait de DS 2019*** Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$

1. Faire la D.E.S. de $f(x)$
2. Montrer qu'une primitive de $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ est $\arctan(x+1)$.
3. En déduire une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

Exercice 18 ***Extrait de DS 2019***

1. Montrer que $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$
2. Déterminer une primitive de $\dfrac{x^3}{1+x^2}$

3. En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_{-1}^{1} x^2 \arctan(x) \mathrm{d}x$
4. Aurait-on pu prévoir le résultat précédent ?

Exercice 19 ***Extrait de DS 2018***
Calculer les intégrales suivantes par la méthode de votre choix :

1. $I = \int_0^{\pi} \cos^2(x)\sin(x)\,dx$
2. $J = \int_0^{1} xe^{x^2+2}\,dx$
3. $K = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x)\sin(2x)\,dx$
4. $L = \int_0^{\frac{1}{2}} (-x+1)e^{2x}\,dx$
5. $M = \int_0^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

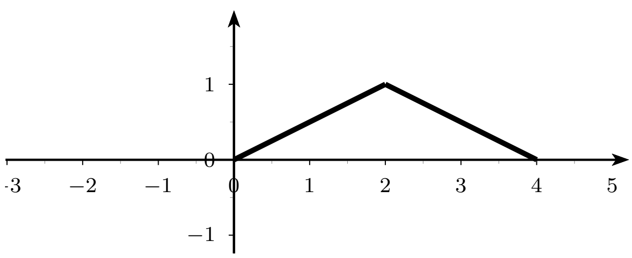
Exercice 20 ***Extrait de DS 2018***

1. Montrer que $2t^2+17t+36 = (2t+9)(t+4)$.
2. Montrer que $\int_1^8 \frac{t}{2t^2+17t+36}dt = -4\ln(12) - \frac{9}{2}\ln(11) + 13\ln(5)$
3. Calculer $I = \int_1^2 \frac{x^5}{2x^6+17x^3+36}dx$ en posant le changement de variable $t = x^3$.

Exercice 21 ***Extrait de DS 2017***
Calculer les intégrales suivantes par la méthode de votre choix.

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(x)dx$
2. $J = \int_0^{e} \frac{t}{x}dt$
3. $K = \int_1^2 \frac{x^2+2}{x^3+6x-6}dx$
4. $L = \int_3^4 \frac{x^3+7x^2+7x-15}{x^2+2x-3}dx.$
5. $M = \int_0^1 \left(t^2-2t\right)e^{2t}dt$

Exercice 22 ***Extrait de DS 2017***
Soit la fonction $s(t)$ définie sur $[0;4]$ par :



1. Déterminer $\int_0^4 s(t)dt$
2. On note s_2 la fonction impaire définie sur $[-4;4]$ telle que $s_2(t) = s(t)$ sur $[0;4]$.
   Déterminer $\int_{-4}^{4} s_2(t)dt$
3. On note s_3 la fonction paire définie sur $[-4;4]$ telle que $s_3(t) = s(t)$ sur $[0;4]$.
   Déterminer $\int_{-4}^{4} s_3(t)dt$

Chapitre 5

Calcul intégral - Partie 2

Exercice 1 ***Intégrales généralisées***

1. (a) Soit $X > 2$. Calculer $\displaystyle\int_2^X \frac{1}{(t+3)(t-1)}\,dt$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t+3)(t-1)}\,dt$ est convergente.

2. (a) Soit $X > 2$. Calculer $\displaystyle\int_2^X \frac{t^2-2t-2}{(t^2+2)(t-1)}\,dt$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t^2-2t-2}{(t^2+2)(t-1)}\,dt$ est divergente.

3. (a) Soit $X > 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{(2t+1)^2+1}\,dt$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2t+1)^2+1}\,dt$ est convergente.

Exercice 2 ***Équivalence***

Dans chacun des cas suivants, dire si l'équivalent est vrai ou faux en justifiant vos réponses.

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
2. $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$
3. $x^2 + x - 2 \underset{0}{\sim} x - 1$
4. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $2\cos(x) - 1 \underset{\pi/3}{\sim} 3x - \pi$

Exercice 3 ***Équivalence***

Dans chacun des cas suivants, dire si l'équivalent est vrai ou faux en justifiant vos réponses.

1. $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$
2. $t^2 + t - 2 \underset{+\infty}{\sim} t^2 - 1$
3. $\dfrac{t^2+t-2}{t^5-3t+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$
4. $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$

Exercice 4 ***Critères de convergence***

Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle est convergente ou divergente :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^3+t}dt,$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt,$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt.$

Exercice 5 ***Un peu de logique***

Les affirmations suivantes sont fausses. Trouver dans chacun des cas un contre-exemple le prouvant.

1. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
2. Soit f et g deux fonctions telles que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq 1$. Alors :

$$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt \text{ diverge } \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \text{ diverge.}$$

Exercice 6 ***Calcul d'intégrales généralisées***

1. Soit $\displaystyle I(X) = \int_1^X \frac{t+1}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t$. Calculer $I(X)$ puis $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} I(X)$.
   On notera cette limite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t$.
2. Justifier que $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^4}$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 7 ***Calcul d'intégrales généralisées***

Soit $a > 1$. On note :

$$I(a) = \int_1^a \frac{\arctan t}{t^2}dt.$$

Calculer $I(a)$ et étudier la convergence de $\displaystyle I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}dt$. On donnera sa valeur, le cas échéant.

Exercice 8 ***Comparaison***

1. (a) Montrer que $\forall t \in [1,\infty[,\ 0 \leq \ln t \leq t$.
   (b) Etudier la convergence de $\displaystyle I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^3}dt$.
2. (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t > t$.
   (b) Etudier la convergence de $\displaystyle J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}dt$.
3. Etudier la convergence de $\displaystyle K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+1}dt,$

Compléments

Exercice 9 ***Extrait de DS 2022***

1. (a) Soit $X > 1$. Calculer $I = \int_1^X \frac{1}{(t+1)(t-2)} dt$.

   (b) En déduire la nature (convergente ou divergente) de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t-2)} dt$.

2. Pour chacune des intégrales suivantes dire, en justifiant votre réponse, si elle est convergente ou divergente.

   (a) $J_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^3} dt$

   (b) $J_2 = \int_0^{10} \frac{1}{t^2} dt$

   (c) $J_3 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

   (d) $J_4 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 10 ***Extrait de DS 2019***

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

   (a) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right) dt$

   (b) $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}{t+2} dt$

2. On souhaite étudier la nature de l'intégrale : $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2+1)}{t^3} dt$

   (a) Montrer que, pour tout $t \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(t^2+1) \leq t$

   (b) En déduire la nature de K.

Exercice 11 ***Extrait de DS 2017*** Les questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. (a) Soit $X > 1$. Calculez $\displaystyle\int_1^X e^{-t} dt$.

   (b) En déduire la nature⋆ de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} |\cos(t)| dt$.

2. (a) Soit $X > e$. Calculez $\displaystyle\int_e^X \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$ en posant le changement de variable $u = \ln(t)$.

   (b) En déduire la nature⋆ de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$.

3. Déterminer la nature⋆ des intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{(t+3)(t+1)} dt$,

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} dt$,

   (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{t} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

4. (a) Soit $X > 1$. Montrez que :

$$\int_1^X \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{t^2} dt.$$

   (b) En déduire la nature⋆ de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.

Exercice 12 ***Extrait de DS 2016*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner la nature de l'intégrale I (convergente ou divergente) :

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{t^3 - 7t + 3}{t(t+1)(t^2-3)} dt$$

2. On souhaite étudier la nature de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^3} dt$.
   (a) En étudiant les variations de la fonction $g(t) = \arctan(t)$,
   montrer que $\forall t \geq 1$, on a $0 \leq \arctan(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire la nature de J.

Chapitre 6

Transformée de Laplace

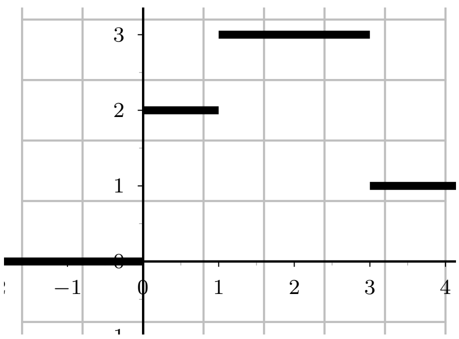
Exercice 1 ***Fonction échelon***

On rappelle que la fonction *Echelon de Heaviside* est définie par : $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

1. Représenter la fonction *échelon retardé* : $t \mapsto \mathcal{U}(t-2)$ et la fonction *échelon avancé* : $t \mapsto \mathcal{U}(t+3)$.
2. Représenter les fonctions
   (a) $t \mapsto \mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-2)$.
   (b) $t \mapsto \mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-4)$.

Exercice 2 ***Exprimer une fonction en utilisant la fonction échelon***

Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



1. Exprimer $f(t)$ en fonction de t sur chacun des intervalles suivants :
   $]-\infty;0[$, $[0;1[$, $[1;3[$, $[3;+\infty[$.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de t en utilisant la fonction échelon unité.

Exercice 3 ***Fonction échelon***

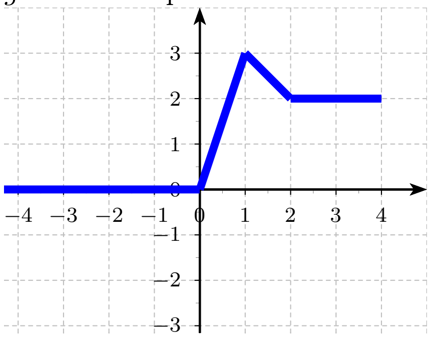
Écrire chaque fonction sans utiliser la fonction $\mathcal{U}$; puis dessiner leur courbe représentative.

1. $f_1(t) = 3\mathcal{U}(t) + \mathcal{U}(t-1) + 3\mathcal{U}(t-2)$
2. $f_2(t) = 2\mathcal{U}(t-1) - t\mathcal{U}(t-2) + (t-2)\mathcal{U}(t-4)$
3. $f_3(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t) - \sin(t)\mathcal{U}(t-\pi)$
4. $f_4(t) = \cos(2t)\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(2t)\mathcal{U}(t-\pi)$
5. $f_5(t) = (t-1)\mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-2) - (2t-1)\mathcal{U}(t-3)$
6. $f_6(t) = t - t\mathcal{U}(t)$

Exercice 4 ***Exprimer une fonction en utilisant la fonction échelon***
Définir chacune des fonctions suivantes par une seule égalité (et donc en utilisant la fonction $\mathcal{U}(t)$) :

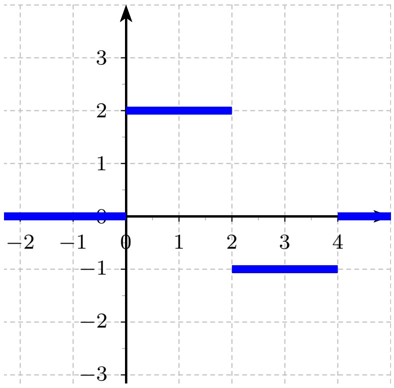
1. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty; 0[\\ t \text{ si } t \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } t \in [1, 2[\\ -t + 4 \text{ si } t \in [2, 4[\\ 0 \text{ si } t \in [4, +\infty[\end{cases}$

2. g est définie par

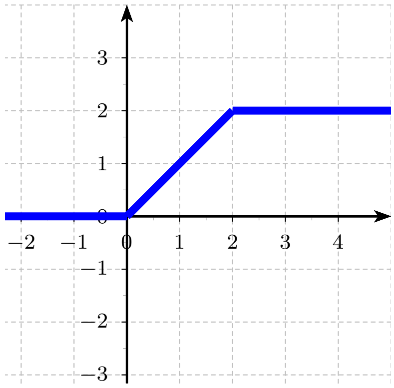


Exercice 5 ***Calcul de transformées de Laplace***
En revenant à la définition, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

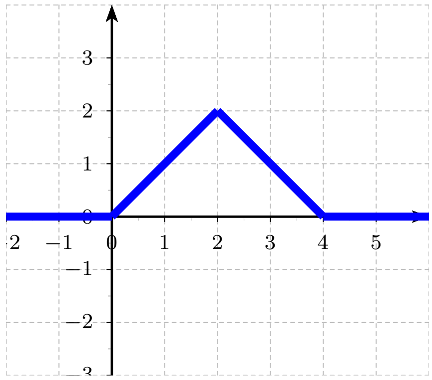
1.



2.



3.



Exercice 6 ***Calcul de transformées de Laplace***
Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (3t^2 - 2t + 1)\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = (4t^4 + 3t^3 + 5t^2 + 2)\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$
4. $f_4(t) = e^{-5t+2}\mathcal{U}(t)$
5. $f_5(t) = (e^{-3t} - e^{3t})\mathcal{U}(t)$
6. $f_6(t) = \sin(3t)\mathcal{U}(t)$
7. $f_7(t) = (\sin(3t) - 2\cos(3t))\mathcal{U}(t)$
8. $f_8(t) = \dfrac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\mathcal{U}(t)$
9. $f_9(t) = \cos(50\pi t + \frac{\pi}{6})\mathcal{U}(t)$

Exercice 7 ***Calcul de transformées de Laplace - Retard***
Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = t\mathcal{U}(t - 7)$
2. $f_2(t) = t^2\mathcal{U}(t - 2)$
3. $f_3(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t - 3)$
4. $f_4(t) = (t^2 + 2t)\mathcal{U}(t - 4)$
5. $f_5(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t - \pi)$
6. $f_6(t) = \cos(2t)\mathcal{U}\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right)$
7. f_7 est définie par la courbe 2 de l'exercice 5.

Exercice 8 ***Calcul de transformées de Laplace***
Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = 2te^{-4t}\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = e^{-t}\sin(3t)\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = e^{3t}\cos(2t)\mathcal{U}(t)$
4. $f_4(t) = (t+1)\mathcal{U}(t-2)$
5. $f_5(t) = e^{-t-2}(t+3)\mathcal{U}(t)$
6. $f_6(t) = e^{-t}(t+1)\mathcal{U}(t-2)$

Exercice 9
Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales définies par :

1. $$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$$
2. $$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 5 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

Exercice 10 ***Transformées de Laplace inverse***
Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{2}{p+1}$
2. $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2-1}$
3. $F_3(p) = \dfrac{p^2+5p+2}{p^3}$
4. $F_4(p) = \dfrac{p^4+2p^2+2p+1}{p^5}$
5. $F_5(p) = 3\dfrac{e^{-p}}{p}$
6. $F_6(p) = 3\dfrac{e^{-2p}}{p+3}$
7. $F_7(p) = 3\dfrac{1}{(p-2)^2}$
8. $F_8(p) = 3\dfrac{p+1}{p^2+2p+2}$

Exercice 11
Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{3p+4}{p^2+3p-4}$
2. $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)}$
3. $F_3(p) = \dfrac{(p-\omega)^2}{p(p^2+\omega^2)}$
4. $F_4(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$
5. $F_5(p) = \dfrac{e^{-p\pi}}{p^2+4p+5}$
6. $F_6(p) = \dfrac{e^{-p}}{(p^2+2p+2)(p+1)}$
7. $F_7(p) = \dfrac{2}{(p+4)^4} - \dfrac{e^{-\frac{\pi}{3}p}}{p^2+4}$

Exercice 12 ***Équation différentielle d'ordre 1***
On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ 2y'(t) + y(t) = e^{-2t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{6.1}$$

1. Résoudre cette équation avec la méthode vue au semestre 1 (solutions = solution particulière + solutions de l'équation homogène).
2. **Détermination de la transformée de Laplace de y :**
   On note F la transformée de y.

(a) Rappeler la formule de $\mathcal{L}_{f'(t)}(p)$

(b) Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (6.1) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p.

3. **Détermination de y :**

(a) Vérifier que $F(p) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{p+2} + \dfrac{8}{3} \times \dfrac{1}{2p+1}$.

(b) Déduire du résultat précédent l'expression de la solution $y(t)$ pour t positif.

Exercice 13 ***Équation différentielle d'ordre 2***

L'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que :

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

On note F la transformée de y.

1. Donner la formule de $\mathcal{L}_{f''(t)}(p)$.
2. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (6.2) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p.
3. Vérifier que $F(p) = \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{(p+1)^2+1}$.
4. Déduire du résultat précédent l'expression de $y(t)$ pour t positif.

Exercice 14 ***Systèmes d'équations différentielles***

Résoudre les systèmes d'équations différentielles :

1. $$\begin{cases} y'(t) + x(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t), \\ x'(t) - y(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t), \\ y(0) = 1, \;\; x(0) = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} f' = 4f + g, \\ g' = f + 4g, \\ f(0) = 0, \;\; g(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 15 ***Équation différentielle d'ordre 2***

1. Résoudre avec la méthode de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

pour $x \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = -7$.

2. Résoudre avec la méthode de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}\mathcal{U}(t)$$

pour $t \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

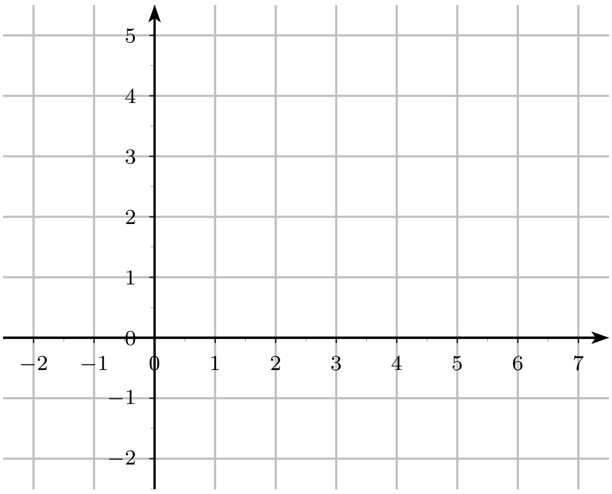
Compléments

Exercice 16 ***Extrait de DS 2022***

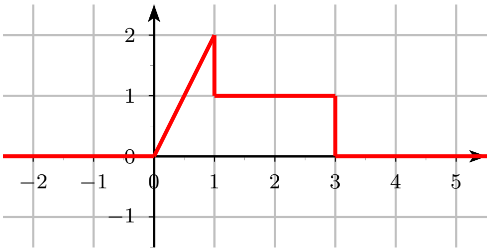
1. Soit $f(t) = 2\mathcal{U}(t-1) + (t-3)\mathcal{U}(t-3) - (3t-6)\mathcal{U}(t-4) + (2t-4)\mathcal{U}(t-5)$

(a) Donner une écriture de la fonction f sans utiliser la fonction échelon $\mathcal{U}$.

(b) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique ci-dessous.



2. Définir la fonction suivante par une seule égalité (et donc en utilisant la fonction échelon $\mathcal{U}$).



Exercice 17 ***Extrait de DS 2022***

1. Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

(a) $g_1(t) = te^{-2t}\mathcal{U}(t)$

(b) $g_2(t) = (t+5)\mathcal{U}(t-3)$

2. Calculer la transformée de Laplace inverse de :

(a) $F(p) = \frac{2}{p} + \frac{6}{p^4}$

(b) $G(p) = \frac{1}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+9}$

Exercice 18 ***Extrait de DS 2022*** On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\begin{cases} f'(t) + 3f(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t) \\ f(0) = 4 \end{cases} \tag{E}$$

1. Détermination de la transformée de Laplace F de f :
   (a) Calculer en fonction de $F(p)$: $\mathcal{L}_{f'(t)}(p)$ puis $\mathcal{L}_{f'(t)+3f(t)}(p)$.
   (b) Calculer $\mathcal{L}_{e^{2t}\mathcal{U}(t)}(p)$.
   (c) Appliquer la transformée de Laplace à l'équation (E) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p.
2. Détermination de f :
   On admet que F peut s'écrire sous la forme : $F(p) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{p-2} + \frac{19}{5} \times \frac{1}{p+3}$.
   En déduire l'expression de $f(t)$ pour t positif.

Exercice 19 $\star$

1. Montrer que $\mathcal{L}_{tf(t)}(p) = -\mathcal{L}'_{f(t)}(p)$.
2. Résoudre l'équation différentielle
$$ty'' + 2y' + ty = 0$$
pour $t > 0$ et $y(0) = 1$.

Exercice 20 ***Extrait de DS 2021***
Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = \cos(\pi t)\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = e^{2t}\cos(\pi t)\mathcal{U}(t)$
4. $f_4(t) = \cos(\pi t)\mathcal{U}(t-1)$
5. $f_5(t) = \dfrac{t^2}{3}\mathcal{U}(t) + \dfrac{t}{\sqrt{2}}\mathcal{U}(t)$

Exercice 21 ***Extrait de DS 2021***
Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

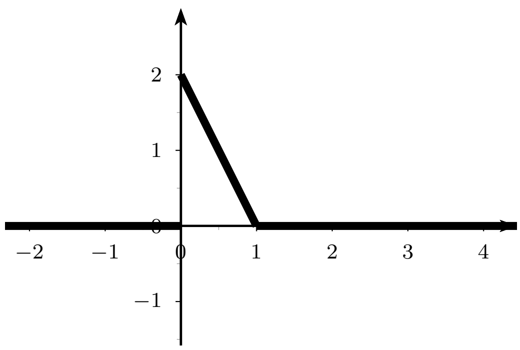
1. $F_1(p) = \dfrac{1}{p^2-1}$
2. $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2+4}$
3. $F_3(p) = \dfrac{p-1}{p^2-2p+2}$
4. $F_4(p) = e^{-\pi p}\dfrac{p}{p^2+9}$

Exercice 22 ***Extrait de DS 2019*** On considère l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = (6\cos(2t) + 6\sin(2t))\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de y est :
$$Y(p) = \frac{p^2+6p+16}{(p+2)(p^2+4)}$$
2. Déterminer a, b et c tels que $Y(p) = \dfrac{a}{p+2} + \dfrac{bp+c}{p^2+4}$.
3. En déduire, l'expression de $y(t)$.
4. Vérifier que votre réponse à la question précédente est bien solution de l'équation différentielle.

Exercice 23 ***Extrait de DS 2019***

1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales suivantes :
   (a) $f_1(t) = \dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$
   (b) $f_2(t) = \dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t-2)$
   (c) $f_3(t) = e^{-5t}\dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$
2. Soit f_4 le signal causal représenté par :



On veut calculer la transformée de Laplace de f_4 de deux façons différentes :

(a) Déterminer la transformée de Laplace de f_4 en utilisant la définition de la transformée de Laplace et en effectuant le calcul intégral.

(b) Déterminer la transformée de Laplace de f_4 en écrivant d'abord f_4 avec des fonctions échelon.

Exercice 24 ***Extrait de DS 2019***

Déterminer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \dfrac{p^6 + 4p^3 + 3p^2}{p^7}$
2. $G(p) = \dfrac{5}{p^2 - 5p}$
3. $H(p) = \dfrac{p + \pi}{p^2 + 2\pi p + \pi^2 + \pi}$
4. $K(p) = e^{-3p}\left(\dfrac{p+1}{p^2+1}\right)$

Exercice 25 ***Extrait de DS 2018***

Résoudre le système différentiel suivant avec f et g deux fonctions causales.

$$\begin{cases} f' + g' = -3f \\ f' - g' = f \\ f(0) = 1 \quad g(0) = 2 \end{cases}$$

Chapitre 7

Suites numériques

Exercice 1 ***Attention à l'écriture !***
Soit quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par

$$u_n = \frac{7}{8}n^2, \qquad v_n = 3n+4, \qquad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Calculer :

1. u_{10+3}, $u_{10}+3$ et $u_{10}+u_3$,
2. v_{11^2}, v_{11}^2, w_{3^3} et w_3^3,
3. w_{v_3}, v_{u_8}, et u_{w_2}.

Exercice 2 ***Calcul des premiers termes***
Calculer les 3 premiers termes de la suite (pour les suites définies de manière récurrente on prendra $U_0 = 1$) :

1. $U_n = 3n^2 + 1$,
2. $U_n = 3n + 1$,
3. $U_{n+1} = 3U_n + 1$,
4. $U_n = 3^n + 1$,
5. $U_{n+1} = 3^{U_n} + 1$,
6. $U_{n+1} = 3U_n + n$.

Exercice 3 ***Arithmétiques ou géométriques ?***
Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre.

1. $U_n = 3n + 1$,
2. $U_{n+1} = 3U_n + 1$,
3. $U_{n+1} = U_n + 3$,
4. $U_n = 3^n + 1$,
5. $U_n = n^n$,
6. $U_{n+1} = \frac{U_n}{2}$.

Exercice 4 ***Suites géométriques***
Montrer que les suites sont des suites géométriques et les écrire sous la forme $U_0 \times q^n$ puis déterminer la limite en $+\infty$.

1. $U_n = \dfrac{3}{2^n}$,
2. $U_n = 2^{n+1}$,
3. $U_n = (\sqrt{2})^{3n}$,
4. $U_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}}$.

Exercice 5 ***Limites de suites***
Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \left(\dfrac{13}{\sqrt{170}}\right)^n$,
2. $u_n = (\sqrt{2})^{3n}$,
3. $u_n = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{-2n}$,
4. $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n+1}{n}$,
5. $u_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$,
6. $u_n = -3\sqrt{(1,05)^{\frac{n}{2}}}$.

Exercice 6 *Symbole* Σ

1. Exprimer à l'aide d'un signe sigma :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{256} \quad \text{puis} \quad B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{256}$$

2. Écrire les sommes suivantes avec le signe Σ puis les calculer :
   (a) $2^5 + 2^6 + \ldots + 2^{11} + 2^{12}$.
   (b) $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$.
   (c) $1 + \pi + \pi^2 + \ldots + \pi^{99} + \pi^{100}$.
   (d) La somme des entiers multiples de 7 supérieurs à 100 et plus petits que 1000.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}$.

Exercice 7 *Calcul de sommes*

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{15} 2k+3$, 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{12} 3 \times \frac{1}{2^n}$, 3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{7} 2n + 3^n$, 4. $\displaystyle\sum_{k=3}^{18} e^{ki\pi}$, 5. $\displaystyle\sum_{k=17}^{53} (-1)^k$.

Exercice 8

Toutes les réponses seront données sous la forme :
- d'une expression littérale,
- d'un calcul posé
- et enfin d'une application numérique.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison -4.
   Déterminer u_7, u_{18} et $\displaystyle\sum_{i=7}^{18} u_i$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.
   Déterminer u_7, u_{18} et $\displaystyle\sum_{i=7}^{18} u_i$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On donne $u_4 = 7$ et $u_7 = 1$.
   Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. On donne $u_4 = 4$ et $u_7 = 108$.
   Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

Exercice 9 *Sommes de suites arithmétiques et géométriques*

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} U_k = 99$.
   Déterminer la raison de la suite.
2. Soit la suite (U_n) définie pour tout entier n par : $U_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4n + 3$.
   Calculer la somme : $S_N = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_N$ en fonction de N.

Exercice 10 ***Limites de sommes***

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}.$$

1. Démontrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. On pose dorénavant $u_0 = 2$ et on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_n - 1$$

   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   (a) Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.
   (b) Déterminer les limites de S_n et de S'_n lorque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11 ***Extrait de DS 2016***

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0.
   Sachant que
   $$U_0 + U_1 + U_2 = \frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad U_1 + U_2 + U_3 = \frac{7}{2}$$
   Déterminer les valeurs de r et U_0.
2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0.
   Sachant que
   $$V_0 + V_1 + V_2 = \frac{26}{9} \qquad \text{et} \qquad V_1 + V_2 + V_3 = \frac{26}{27}$$
   Déterminer les valeurs de q et V_0.

Compléments

Exercice 12 ***Extrait de DS 2022***

1. Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre. Préciser la raison quand elle existe.
   (a) $U_n = \frac{2^{n+2}}{5^{2n}}$
   (b) $U_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+4}$
   (c) $U_{n+1} = 2U_n + 5$
   (d) $U_n = 4n + 3$
   (e) $U_{n+1} = 3U_n$
   (f) $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$
2. Déterminer la limite des suites suivantes.
   (a) $U_n = \frac{2^{n+2}}{5^{2n}}$
   (b) $U_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+4}$
   (c) $U_n = 4n + 3$
   (d) $U_{n+1} = 3U_n$ avec $U_0 = 2$

Exercice 13 ***Extrait de DS 2021***

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$. Calculer u_{10}, u_{20} et u_{100}
2. Une suite arithmétique (u_n) de raison 2 est telle que $u_0 = 1$ et N étant un nombre entier tel que $\sum_{i=3}^{N} u_i = 520$. Calculez N. (*<u>Indication :</u>* $22^2 = 484$ *et* $46^2 = 2116$)
3. Une suite géométrique u de raison $r = \dfrac{1}{4}$ et $u_0 = 32$. Calculez u_2, u_3, u_5 et u_8
4. Soit (u_n) une suite géométrique de raison r. Sachant que $u_1 = -1$ et $u_3 = 1$, calculer r, u_0 et u_5

Exercice 14 ***Extrait de DS 2018***

Dans chacun des cas ci-dessous exprimez u_n en fonction de n.

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_3 = 2$ et $u_{11} = 0$.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que : $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = 510$.

Exercice 15 ***Extrait de DS 2018***

Pour chacune des suites $u_n = (-3)^{2n+1}$ et $v_n = \dfrac{e^{(n+1)^2}}{e^n}$:

1. Calculez les 3 premiers termes de la suite.
2. Précisez en justifiant si la suite est géométrique ou non. Si oui, précisez sa raison.

Exercice 16 ***Extrait de DS 2018***

Déterminez la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n^5 + 2n^4 + 2}$,
2. $v_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$.

Exercice 17 ***Extrait de DS 2017*** Les questions 1., 2. et 3. suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{3} \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

   (a) Calculez u_1, u_2 et u_3.

   (b) Montrez que la suite $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   (c) En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.

   (d) Calculez $u_2 + u_3 + \cdots + u_{100}$ (on simplifiera l'expression obtenue au maximum !).

2. On considère la suite définie par $w_n = -\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3^k}$.

   (a) Exprimez w_n sans utiliser le symbole $\sum$.

   (b) La suite (w_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Si oui, on précisera la raison.

3. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 12$ et $u_8 = 0$. Exprimez u_n en fonction de n.