TP5 : Déterminant, comatrices et matrices inverses

1 Elimination d'une ligne et d'une colonne

Exercice 1

1. Écrire une fonction en Pyhton nommée *matriceLignei* qui prend en entrée une matrice A et un indice i et qui renvoie la matrice obtenue en éliminant la ligne i de A (on pourra utiliser la fonction delete !).
2. Écrire une fonction en Pyhton nommée *matriceColonnej* qui prend en entrée une matrice A et un indice j et qui renvoie la matrice obtenue en éliminant la colonne j de A.
3. Écrire une fonction en Pyhton nommée *sousMatrice* qui prend en entrée une matrice A, un indice i et un indice j et qui renvoie la matrice obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j de A.

2 Déterminant

Définition 1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *On appelle déterminant de A, noté* $det(A)$ *ou* $|A|$, *la valeur définie par :*

$$det(A) = ad - bc.$$

<u>**Exemple :**</u> $det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 8 = 9.$

Exercice 2

Écrire une fonction, nommée *det2*, qui prend en entrée une matrice carrée A de taille 2 et qui renvoie son déterminant (prévoir que la fonction renvoie un message d'erreur si la matrice n'est pas carrée de taille 2).

Définition 2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *On appelle déterminant de A, noté* $det(A)$ *ou* $|A|$, *la valeur définie par :*

$$det(A) = \begin{vmatrix} {}^{+}\boxed{a} & b & c \\ {}^{-}\boxed{d} & e & f \\ {}^{+}\boxed{g} & h & i \end{vmatrix} = +a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \times \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \times \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

On dit que $det(A)$ *a été obtenu en développant par rapport à la première colonne.*

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$det(A) = det\begin{pmatrix} {}^{+}\boxed{3} & 4 & 3 \\ {}^{-}\boxed{0} & 1 & -2 \\ {}^{+}\boxed{\text{-1}} & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - (-8-3) = 20$$

Exercice 3
On rappelle que si on développe par rapport à la première colonne, la formule générale du déterminant de A est :

$$det(A) = a_{0,0}\Delta_{0,0} - a_{1,0}\Delta_{1,0} + a_{2,0}\Delta_{2,0}$$

où $\Delta_{i,0}$ est le déterminant de la matrice de taille 2 obtenue en éliminant la ligne i et la colonne 0 dans A.

Écrire une fonction, nommée *det3*, qui prend en entrée une matrice carrée A de taille 3 et qui renvoie son déterminant obtenue en développant par rapport à la première colonne. On utilisera la fonction *sous_matrice* de l'exercice 1 et on pourra prévoir que la fonction renvoie un message d'erreur si la matrice n'est pas carrée de taille 3.

3 Comatrice

Définition 3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.*
On appelle comatrice de A la matrice de taille n, notée $Co(A)$, telle que

$$Co(A)(i,j) = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j dans A.

Remarque : La comatrice est la matrice des *cofacteurs*. Les cofacteurs interviennent dans le calcul du déterminant lorsque l'on développe par rapport à une ligne ou une colonne. Par exemple, si on développe le déterminant par rapport à la première colonne, on a que $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} Co(A)(i,1)$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. on obtient :

$$Co(A) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Co(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. Écrire une fonction, nommée *comatrice*, qui prend en entrée une matrice carrée de taille 3, et qui renvoie sa comatrice. On utlilisera les fonctions *sous_matrice* et *det2* précédemment programmées.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le déterminant de A.
   (b) En utilisant la fonction *comatrice* ci-dessus, calculer à l'aide de Spyder le produit matriciel $A \times^t Co(A)$. Que constate-t-on ?

4 Matrice inverse

Proposition 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Si le déterminant de A est non nul alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times^t Co(A)$$

Remarque : Pour calculer l'inverse d'une matrice, on calcule son déterminant et sa comatrice puis on applique la formule !

Exemple 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$Co(A) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

or $det(A) = 18$. Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \times {}^t\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \times \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{2}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & -2 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. on obtient :

$$Co(B) = \begin{pmatrix} 0 & -16 & -24 \\ -33 & -67 & 15 \\ -33 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

or $det(B) = -264$. Donc

$$B^{-1} = \frac{-1}{264} \times {}^t\begin{pmatrix} 0 & -16 & -24 \\ -33 & -67 & 15 \\ -33 & 5 & -9 \end{pmatrix} = \frac{-1}{264} \begin{pmatrix} 0 & -33 & -33 \\ -16 & -67 & 5 \\ -24 & 15 & -9 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

1. Calculer à la main, en utilisant la formule ci-dessus, l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Écrire une fonction, nommée *inverse*, qui prend en entrée une matrice carrée de taille 3 et qui renvoie son inverse.
   On fera en sorte que la fonction renvoie un message d'erreur si la matrice n'est pas carrée et si elle n'est pas inversible.
   Si besoin, on utilisera nos propres fonctions *det2, transpo, matrice_ligne, sous_matrice, comatrice...* mais en aucun cas une fonction Pylab équivalente !

5 Exercices complémentaires

Exercice 6

Écrire une fonction récursive qui prend en entrée une matrice A carrée de taille quelconque et qui renvoie le déterminant de A.

On rappelle que la formule générale pour calculer le déterminant d'une matrice A de taille n, en développant par rapport à la colonne 0 est :

$$det(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,0}(-1)^{i+0}\Delta_{i,0} = a_{0,0}(-1)^0\Delta_{0,0} + a_{1,0}(-1)^1\Delta_{1,0} + a_{2,0}(-1)^2\Delta_{2,0} + \dots$$