# Mathématiques - Devoir Surveillé 4
## juin 2019 - Durée : 1h45

*Tout document et appareil électronique est interdit*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

### Exercice 1

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :
   (a) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right) dt$

   On sait que $\sin(X) \underset{0}{\sim} X$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{t^2+t+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2+t+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après Riemann. Donc, par équivalence, $I$ converge.

   (b) $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}{x+2} dx$

   On peut montrer que $\dfrac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge d'après Riemann. Donc, par équivalence, $J$ diverge.

2. On souhaite étudier la nature de l'intégrale : $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3} dx$
   (a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(x^2+1) \leq x$

   On pose $f(x) = \ln(x^2+1) - x$. On a alors $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} - 1 = \dfrac{-x^2+2x-1}{x^2+1} = \dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}$.
   La dérivée de $f$ est négative, donc $f$ est décroissante.
   Or $f(1) = \ln(2) - 1 < 0$ donc $f$ est toujours négative.

   (b) En déduire la nature de $K$.

   On en déduit que, pour tout $x \geq 1$ on a $0 \leq \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^3} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge d'après Riemann. Donc, par comparaison, $K$ converge.

### Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = (6\cos(2t) + 6\sin(2t))\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de $y$ est :

$$Y(p) = \frac{p^2+6p+16}{(p+2)(p^2+4)}$$

Pour la suite on note $Y$ la transformée de $y$.
On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
y'(t)+2y(t)=(6\cos(2t)+6\sin(2t))\mathcal{U}(t) &\Leftrightarrow pY(p)-y(0)+2Y(p)=6\frac{p}{p^2+4}+6\frac{2}{p^2+4}\\
&\Leftrightarrow Y(p)\times(p+2)=\frac{6p+12}{p^2+4}+1\\
&\Leftrightarrow Y(p)\times(p+2)=\frac{p^2+6p+16}{p^2+4}\\
&\Leftrightarrow Y(p)=\frac{p^2+6p+16}{(p+2)(p^2+4)}
\end{aligned}$$

2. Déterminer $a$, $b$ et $c$ tels que $Y(p)=\dfrac{a}{p+2}+\dfrac{bp+c}{p^2+4}$.
   On fait la D.E.S. de $Y$.
   On obtient $a$ en multipliant $Y$ par $(p+2)$ puis en remplaçant $p$ par -2 : $a=1$.
   On obtient $b$ en multipliant $Y$ par $p$ puis en faisant tendre $p$ vers $+\infty$ : $b=0$
   On obtient $b$ en remplaçant $p$ par 0 : $c=6$

3. En déduire, l'expression de $y(t)$.
   On a $Y(p)=\dfrac{1}{p+2}+\dfrac{6}{p^2+4}=\dfrac{1}{p+2}+3\times\dfrac{2}{p^2+4}$. Donc, par identification :

$$y(t)=\left(e^{-2t}+3\sin(2t)\right)\mathcal{U}(t)$$

4. Vérifier que votre réponse à la question précédente est bien solution de l'équation différentielle.
   Il suffit de remplacer $y$ et $y'$ dans l'équation différentielle (et de vérifier la condition initiale) :

$$y'(t)+2y(t)=(-2e^{-2t}+6\cos(2t))\mathcal{U}(t)+2(e^{-2t}+3\sin(2t))\mathcal{U}(t)=(6\cos(2t)+6\sin(2t))\mathcal{U}(t)$$

   et $y(0)=e^0+3\sin(0)=1$.
   Donc, le $y$ déterminé à la question 3 est bien solution.

**Exercice 3** Soit la série :

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

1. Calculer $S_1$, $S_2$ et $S_3$.

$$S_1=\sum_{n=0}^{1}\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$S_2=\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$
$$S_3=\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}++\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

2. Exprimer $S_N$ en fonction de $N$.
   Par télescopage on a

$$S_N=1-\frac{1}{2^{N+1}}$$

3. En déduire la nature de la série.

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^{N+1}} = 1$$

On en déduit que la série converge (vers 1).

**Exercice 4** les questions suvantes sont indépendantes.

1. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sin(1) \neq 0$. Donc la série diverge.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^7}{(\sqrt{n}+3)(n^2+2)^4}$

On a $\displaystyle\frac{(n-1)^7}{(\sqrt{n}+3)(n^2+2)^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^7}{\sqrt{n}n^8} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge d'après Riemann. Donc, par équivalence, la série converge.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^2}{9}\right)^n$

La série est une série géométrique de raison $q = \dfrac{e^2}{9} \in ]-1;1[$ (car $e < 3$).
Donc la série converge.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^3}$ On a vu dans l'exercice 1 que, pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann. Donc, par comparaison, la série converge.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{3n+1}\right)^n$

Appliquons le critère de Cauchy :

$$L = \lim_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{3n+1}\right) = 0$$

Donc, d'après le critère de Cauchy, la série converge.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1,1)^n}$

Appliquons le critère de d'Alembert :

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(1,1)^{n+1}} \times \frac{(1,1)^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{1,1} = \frac{1}{1,1} < 1$$

Donc, d'après le critère de d'Alembert, la série converge.

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{n}\right)$

Appliquons le critère de Cauchy :

$$L = \lim_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{n}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

Donc, d'après le critère de Cauchy, la série converge.

2. Donner un exemple de suite géométrique $(U_n)$ telle que la série de terme général $U_n$ converge vers la valeur -2 : c'.-à-d. $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = -2$.

   Par exemple, $U_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ convient : $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -2$

**Exercice 5**

1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales suivantes :

   (a) $f_1(t) = \frac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$

   On a $\mathcal{L}_{f_1}(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-3}\right)$

   (b) $f_2(t) = \frac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t-2)$

   On a $f_2(t) = \frac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t-2) = g(t-2)$ avec $g(t) = \frac{1-e^{3(t+2)}}{4}\mathcal{U}(t)$. On en déduit que

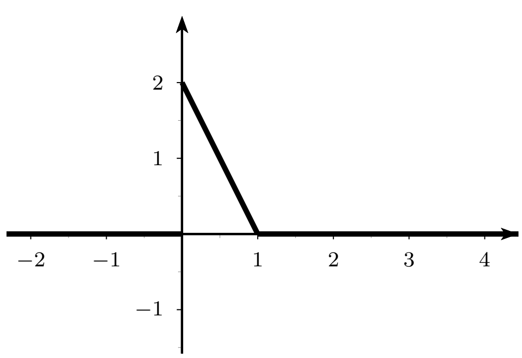
$$\mathcal{L}_{f_2}(p) = e^{-2p}\mathcal{L}_g(p) = \frac{e^{-2p}}{4}\left(\frac{1}{p} - \frac{e^6}{p-3}\right)$$

   (c) $f_3(t) = e^{-5t}\frac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$

   On a $f_3(t) = e^{-5t}\frac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t) = \frac{1}{4}(e^{-5t} - e^{-2t})\mathcal{U}(t)$. On en déduit que

$$\mathcal{L}_{f_3}(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+5} - \frac{1}{p+2}\right)$$

2. Soit $f_4$ le signal causal représenté par :




   On veut calculer la transformée de Laplace de $f_4$ de deux façons différentes :

   (a) Déterminer la transformée de Laplace de $f_4$ en utilisant la définition de la transformée de Laplace et en effectuant le calcul intégral.

   Par définition, on a $\mathcal{L}_{f_4}(p) = \int_0^1 e^{-pt}(-2t+2)\,dt$. Nous allons calculer cette intégrale en effectuant une IPP :

$$\mathcal{L}_{f_4}(p) = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}(-2t+2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-e^{-pt}}{p} \times (-2)dt = \frac{2}{p} - \frac{2}{p}\left(-\frac{e^{-p}}{p} + \frac{1}{p}\right) = \frac{2e^{-p}}{p^2} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p}$$

(b) Déterminer la transformée de Laplace de $f_4$ en écrivant d'abord $f_4$ avec des fonctions échelon.
On a $f_4(t) = (-2t+2)\left(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right)$. On a

$$\mathcal{L}_{(-2t+2)\mathcal{U}(t)}(p) = -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p} \text{ et } \mathcal{L}_{(-2t+2)\mathcal{U}(t-1)}(p) = -\frac{2e^{-p}}{p^2}$$

On retrouve le fait que

$$\mathcal{L}_{f_4(t)}(p) = \frac{2e^{-p}}{p^2} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p}$$

**Exercice 6** Déterminer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \dfrac{p^6 + 4p^3 + 3p^2}{p^7}$
   On a $F(p) = \dfrac{p^6}{p^7} + \dfrac{4p^3}{p^7} + \dfrac{3p^2}{p^7} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{3}\dfrac{6}{p^4} + \dfrac{1}{8}\dfrac{24}{p^5}$
   Donc, par identification
   $$f(t) = \left(1 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^4\right)\mathcal{U}(t)$$

2. $G(p) = \dfrac{5}{p^2 - 5p}$
   On fait la D.E.S de $G$ : $G(p) = \dfrac{5}{p(p-5)} = \dfrac{1}{p-5} + \dfrac{-1}{p}$
   Donc, par identification
   $$g(t) = \left(e^{5t} - 1\right)\mathcal{U}(t)$$

3. $H(p) = \dfrac{p+\pi}{p^2 + 2\pi p + \pi^2 + \pi}$
   On fait la forme canonique du dénominateur de $H$ : $H(p) = \dfrac{p+\pi}{(p+\pi)^2 + \pi}$
   Donc $H(p) = H_0(p+\pi)$ où $H_0(p) = \dfrac{p}{p^2+\pi}$.
   Donc, par identification, $h_0(t) = \cos(\sqrt{\pi}t)\mathcal{U}(t)$ et
   $$h(t) = e^{-\pi t}h_0(t) = e^{-\pi t}\cos(\sqrt{\pi}t)\mathcal{U}(t)$$

4. $K(p) = e^{-3p}\left(\dfrac{p+1}{p^2+1}\right)$
   On a $K(p) = e^{-3p}K_0(p)$ où $K_0(p) = \dfrac{p+1}{p^2+1}$.
   On décompose $K_0$ en somme de 2 fractions : $K_0(p) = \dfrac{p}{p^2+1} + \dfrac{1}{p^2+1}$.
   Donc, par identification, $k_0(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t) + \sin(t)\mathcal{U}(t)$ et
   $$k(t) = k_0(t-3) = (\cos(t-3) + \sin(t-3))\mathcal{U}(t-3)$$