Mathématiques - Devoir Surveillé 4
juin 2019 - Durée : 1h45

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

   (a) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right) dt$ (b) $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}{x+2} dx$

2. On souhaite étudier la nature de l'intégrale : $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3} dx$

   (a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(x^2+1) \leq x$

   (b) En déduire la nature de K.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = (6\cos(2t) + 6\sin(2t))\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de y est :

$$Y(p) = \frac{p^2+6p+16}{(p+2)(p^2+4)}$$

2. Déterminer a, b et c tels que $Y(p) = \dfrac{a}{p+2} + \dfrac{bp+c}{p^2+4}$.
3. En déduire, l'expression de $y(t)$.
4. Vérifier que votre réponse à la question précédente est bien solution de l'équation différentielle.

Exercice 3 Soit la série :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Exprimer S_N en fonction de N.
3. En déduire la nature de la série.

Exercice 4 les questions suvantes sont indépendantes.

1. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^7}{(\sqrt{n}+3)(n^2+2)^4}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^2}{9}\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^3}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{3n+1}\right)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1,1)^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{n}\right)$

2. Donner un exemple de suite géométrique (U_n) telle que la série de terme général U_n converge vers la valeur -2 : c'.-à-d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = -2$.

Exercice 5

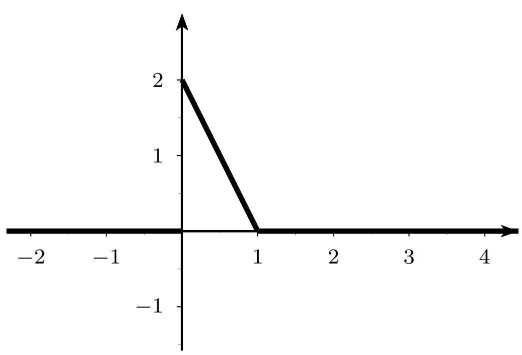
1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales suivantes :

(a) $f_1(t) = \dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$

(b) $f_2(t) = \dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t-2)$

(c) $f_3(t) = e^{-5t}\dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$

2. Soit f_4 le signal causal représenté par :



On veut calculer la transformée de Laplace de f_4 de deux façons différentes :

(a) Déterminer la transformée de Laplace de f_4 en utilisant la définition de la transformée de Laplace et en effectuant le calcul intégral.

(b) Déterminer la transformée de Laplace de f_4 en écrivant d'abord f_4 avec des fonctions échelon.

Exercice 6 Déterminer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \dfrac{p^6+4p^3+3p^2}{p^7}$

2. $G(p) = \dfrac{5}{p^2-5p}$

3. $H(p) = \dfrac{p+\pi}{p^2+2\pi p+\pi^2+\pi}$

4. $K(p) = e^{-3p}\left(\dfrac{p+1}{p^2+1}\right)$