Nom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4.1
lundi 19 juin 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$.

Le terme général de la série : $U_n = e^{-n}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-1}$.
Comme $|q| < 1$, alors la série converge.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-5}{n^3+2n+3}$

Le terme général de la série : $U_n = \dfrac{n^2-5}{n^3+2n+3}$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n}$.
D'apèrs le critère de Riemann la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.
Donc, par équivalence, la série $\sum U_n$ diverge.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\sin^4(n)$

Encadrons le terme général de la série : $U_n = \dfrac{\sin^4(n)}{n^3}$.
Pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq \sin^4(n) \leq 1$ donc $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n^3}$.
D'apèrs le critère de Riemann la série $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge.
Donc, par comparaison, la série $\sum U_n$ converge.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (1+i)^{-2n}$

Le terme général de la série : $U_n = (1+i)^{-2n}$ est une suite géométrique de raison $q = (1+i)^{-2}$.
On calcule le module de la raison : $|q| = \frac{1}{2} < 1$, alors la série converge.

2. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas et si elles sont absolument convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$.

<u>Étude de l'absolue convergence :</u>

On a $|U_n| = \dfrac{1}{n+3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Or, d'après le critère de Riemann : $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.
Donc, par équivalence, $\sum |U_n|$ diverge.
Donc la série $\sum U_n$ ne converge pas absolument.

<u>Étude de la convergence :</u>

On a $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n+3}$ qui est une suite alternée.
De plus $|U_n| = \dfrac{1}{n+3}$ décroit et tend vers 0.
Donc, d'après le critère des séries alternées, la série $\sum U_n$ converge.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n+3)}{n^2-1}$

<u>Étude de l'absolue convergence :</u>

On a $|U_n| = \dfrac{|\sin(n+3)|}{n^2-1}$. Donc pour tout $n \geq 2$ on a l'encadrement $0 \leq |U_n| \leq \dfrac{1}{n^2-1}$.
Par ailleurs, en $+\infty$, $\dfrac{1}{n^2-1} \sim \dfrac{1}{n^2}$.
Or, d'après le critère de Riemann : $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.
Donc, par équivalence, $\sum \dfrac{1}{n^2-1}$ converge.
Donc, par comparaison, la série $\sum |U_n|$ converge.
Donc la série $\sum U_n$ converge absolument.

<u>Étude de la convergence :</u>

Comme $\sum U_n$ converge absolument ; alors $\sum U_n$ converge.

Exercice 2

Pour étudier la nature d'une série de la forme $\sum U_n$, le mathématicien français du 19ème siècle Augustin Cauchy a énoncé la méthode suivante :

- Calculer la limite $L = \lim\limits_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}}$,
- Selon la valeur de L on a

$L < 1$	$L > 1$	$L = 1$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ converge	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ diverge	On ne peut pas rien dire sur la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

Par exemple : pour $U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$: $L = \lim\limits_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ converge.

Utiliser cette méthode pour étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

   On calcule : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1}{n^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 < 1$.

   Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ converge.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$.

   On calcule : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n} = 2 > 1$.

   Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

Exercice 3 Les questions 1.et 2. sont indépendantes.

1. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   Le terme général de la série est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $U_0 = 5$. Donc

$$\sum_{n=0}^{N} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = 5 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}}{1-\frac{2}{3}} = 15 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}\right)$$

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 15 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}\right) = 15$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} = 0$.

   On peut donc dire que la série converge vers 15.

2. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}$.

   On commence par faire la DES du terme général de la série :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{-1}{n}$$

Donc, par télescopage :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N}$$

(b) En déduire la nature et la limite de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

On en déduite que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1.$
Donc la série converge vers 1.

Exercice 4 Complétez le tableau suivant :

$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$	$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$	$\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2+w^2}$ avec $w \in \mathbb{R}$	$\cos(wt)\mathcal{U}(t)$
$\frac{n!}{p^{n+1}}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$t^n\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{L}_f(p+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$	$e^{-at}f(t)$

Exercice 5

Calculez la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \frac{p^3+2p+1}{p^4}$

   On a $F_1(p) = \frac{p^3}{p^4} + \frac{2p}{p^4} + \frac{1}{p^4} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^4}$.
   On en déduit que $F_1(p)$ est la transformée de Laplace de

$$f_1(t) = \mathcal{U}(t) + t^2\mathcal{U}(t) + \frac{t^3}{6}\mathcal{U}(t)$$

2. $F_2(p) = \frac{p}{p^2-2+p}$

   On a $F_2(p) = \frac{p}{(p-1)(p+2)} = \frac{1}{3(p-1)} + \frac{2}{3(p+2)}$.
   On en déduit que $F_2(p)$ est la transformée de Laplace de

$$f_2(t) = \frac{e^t}{3}\mathcal{U}(t) + \frac{2}{3}e^{-2t}\mathcal{U}(t)$$

3. $F_3(p) = \frac{p+1}{p^2+2}$

On a $F_3(p) = \dfrac{p}{p^2+(\sqrt{2})^2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{p^2+(\sqrt{2})^2}$.
On en déduit que $F_3(p)$ est la transformée de Laplace de

$$f_3(t) = \cos(\sqrt{2}t)\mathcal{U}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\mathcal{U}(t)$$

4. $F_4(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2-2+p}$

   On a $F_4(p) = \dfrac{e^{-2p}}{(p-1)(p+2)} = \dfrac{e^{-2p}}{3(p-1)} - \dfrac{e^{-2p}}{3(p+2)} = \dfrac{e^{-2p}}{3}\mathcal{L}_{e^t\mathcal{U}(t)}(p) - \dfrac{e^{-2p}}{3}\mathcal{L}_{e^{-2t}\mathcal{U}(t)}(p)$.
   On en déduit que $F_4(p)$ est la transformée de Laplace de

$$f_4(t) = \frac{e^{t-2}}{3}\mathcal{U}(t-2) - \frac{e^{-2(t-2)}}{3}\mathcal{U}(t-2)$$

5. $F_5(p) = \dfrac{1}{p^2+6p+13}$

   On a $F_5(p) = \dfrac{1}{(p+3)^2+4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(p+3)^2+2^2} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}_{\sin(2t)\mathcal{U}(t)}(p+3)$.
   On en déduit que $F_5(p)$ est la transformée de Laplace de

$$f_5(t) = \frac{e^{-3t}}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t)$$

Exercice 6 On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On note $Y(p) = \mathcal{L}_y(p)$.

1. Montrez que $Y(p) = \dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2}$.

   On sait d'après le cours que

$$\mathcal{L}_{y'}(p) = p\mathcal{L}_y(p) - y(0) = pY(p) - y(0)$$

   et

$$\mathcal{L}_{y''}(p) = p^2\mathcal{L}_y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$$

   En remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

$$p^2Y(p) - py(0) + 2pY(p) - 2y(0) + Y(p) = \frac{1}{p^2}$$

   Donc

$$Y(p)\left(p^2+2p+1\right) = \frac{1}{p^2} + p + 2$$

   On en déduit que $Y(p) = \dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2}$.

2. Montrez que $\dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2} = \dfrac{3}{p+1} + \dfrac{2}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2}{p}$.

   Il suffit d'effectuer la DES de $\dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2}$.

   On peut également réduire le membre de gauche au même dénominateur.

3. En déduire l'expression de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle (1).

   On en déduit que $Y(p)$ est la transformée de Laplace de

$$y(t) = \left(3e^{-t} + 2te^{-t} + t - 2\right)\mathcal{U}(t)$$