Nom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4.1
lundi 19 juin 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-5}{n^3+2n+3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\sin^4(n)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1+i)^{-2n}$

2. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas et si elles sont absolument convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n+3)}{n^2-1}$

Exercice 2

Pour étudier la nature d'une série de la forme $\sum U_n$, le mathématicien français du 19ème siècle Augustin Cauchy a énoncé la méthode suivante :

• Calculer la limite $L = \lim\limits_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}}$,

• Selon la valeur de L on a

$L<1$	$L>1$	$L=1$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ converge	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ diverge	On ne peut pas rien dire sur la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

Par exemple : pour $U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$: $L = \lim\limits_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ converge.

Utiliser cette méthode pour étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 3 Les questions 1.et 2. sont indépendantes.

1. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}$.

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Exercice 4 Complétez le tableau suivant :

$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$	$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$		$\frac{p}{p^2+w^2}$ avec $w \in \mathbb{R}$	
$\frac{n!}{p^{n+1}}$ avec $n \in \mathbb{N}$		$\mathcal{L}_f(p+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$	

Exercice 5

Calculez la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{p^3+2p+1}{p^4}$
2. $F_2(p) = \dfrac{p}{p^2-2+p}$
3. $F_3(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2}$
4. $F_4(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2-2+p}$
5. $F_5(p) = \dfrac{1}{p^2+6p+13}$

Exercice 6 On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On note $Y(p) = \mathcal{L}_y(p)$.

1. Montrez que $Y(p) = \dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2}$.
2. Montrez que $\dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2} = \dfrac{3}{p+1} + \dfrac{2}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2}{p}$.
3. En déduire l'expression de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle (4).

Nom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4.2
lundi 19 juin 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-5}{n^3+2n+3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\sin^4(n)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1+i)^{-2n}$

2. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas et si elles sont absolument convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n+3)}{n^2-1}$

Exercice 2

Pour étudier la nature d'une série de la forme $\sum U_n$, le mathématicien français du 19ème siècle Augustin Cauchy a énoncé la méthode suivante :

• Calculer la limite $L = \lim\limits_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}}$,

• Selon la valeur de L on a

$L < 1$	$L > 1$	$L = 1$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ converge	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ diverge	On ne peut pas rien dire sur la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

<u>Par exemple</u> : pour $U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$: $L = \lim\limits_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ converge.

Utiliser cette méthode pour étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 3 Les questions 1.et 2. sont indépendantes.

1. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}$.

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Exercice 4 Complétez le tableau suivant :

$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$	$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{p^2}$		$\dfrac{p}{p^2+w^2}$ avec $w \in \mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{p+a}$ avec $a \in \mathbb{R}$		$\mathcal{L}_f(p+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$	

Exercice 5

Calculez la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{p^3+2p+1}{p^4}$
2. $F_2(p) = \dfrac{p}{p^2-2+p}$
3. $F_3(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2}$
4. $F_4(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2-2+p}$
5. $F_5(p) = \dfrac{1}{p^2+6p+13}$

Exercice 6 On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

On note $Y(p) = \mathcal{L}_y(p)$.

1. Montrez que $Y(p) = \dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2}$.
2. Montrez que $\dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2} = \dfrac{3}{p+1} + \dfrac{2}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2}{p}$.
3. En déduire l'expression de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle (4).

Nom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4.3
lundi 19 juin 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-5}{n^3+2n+3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\sin^4(n)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (1+i)^{-2n}$

2. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas et si elles sont absolument convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n+3)}{n^2-1}$

Exercice 2

Pour étudier la nature d'une série de la forme $\sum U_n$, le mathématicien français du 19ème siècle Augustin Cauchy a énoncé la méthode suivante :

• Calculer la limite $L = \lim_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}}$,

• Selon la valeur de L on a

$L<1$	$L>1$	$L=1$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ converge	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ diverge	On ne peut pas rien dire sur la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

<u>Par exemple</u> : pour $U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$: $L = \lim_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ converge.

Utiliser cette méthode pour étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 3 Les questions 1.et 2. sont indépendantes.

1. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}$.

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Exercice 4 Complétez le tableau suivant :

$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$	$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p^2}$		$\frac{w}{p^2+w^2}$ avec $w \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{p+a}$ avec $a \in \mathbb{R}$		$e^{-\tau p}\mathcal{L}_f(p)$ avec $\tau \in \mathbb{R}$	

Exercice 5

Calculez la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{p^3+2p+1}{p^4}$
2. $F_2(p) = \dfrac{p}{p^2-2+p}$
3. $F_3(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2}$
4. $F_4(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2-2+p}$
5. $F_5(p) = \dfrac{1}{p^2+6p+13}$

Exercice 6 On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

On note $Y(p) = \mathcal{L}_y(p)$.

1. Montrez que $Y(p) = \dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2}$.
2. Montrez que $\dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2} = \dfrac{3}{p+1} + \dfrac{2}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2}{p}$.
3. En déduire l'expression de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle (4).

Nom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4.4
lundi 19 juin 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-5}{n^3+2n+3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\sin^4(n)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1+i)^{-2n}$

2. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas et si elles sont absolument convergentes ou pas :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n+3)}{n^2-1}$

Exercice 2

Pour étudier la nature d'une série de la forme $\sum U_n$, le mathématicien français du 19ème siècle Augustin Cauchy a énoncé la méthode suivante :

• Calculer la limite $L = \lim\limits_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}}$,

• Selon la valeur de L on a

$L<1$	$L>1$	$L=1$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ converge	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ diverge	On ne peut pas rien dire sur la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

Par exemple : pour $U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$: $L = \lim\limits_{n\to\infty} |U_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ converge.

Utiliser cette méthode pour étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 3 Les questions 1.et 2. sont indépendantes.

1. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. (a) Déterminer l'expression en fonction de N de : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}$.

   (b) En déduire la nature et la limite de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Exercice 4 Complétez le tableau suivant :

$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$	$\mathcal{L}_f(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$		$\frac{w}{p^2+w^2}$ avec $w \in \mathbb{R}$	
$\frac{n!}{p^{n+1}}$ avec $n \in \mathbb{N}$		$e^{-\tau p}\mathcal{L}_f(p)$ avec $\tau \in \mathbb{R}$	

Exercice 5

Calculez la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{p^3+2p+1}{p^4}$
2. $F_2(p) = \dfrac{p}{p^2-2+p}$
3. $F_3(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2}$
4. $F_4(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2-2+p}$
5. $F_5(p) = \dfrac{1}{p^2+6p+13}$

Exercice 6 On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

On note $Y(p) = \mathcal{L}_y(p)$.

1. Montrez que $Y(p) = \dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2}$.
2. Montrez que $\dfrac{p^3+2p^2+1}{(p^2+2p+1)p^2} = \dfrac{3}{p+1} + \dfrac{2}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2}{p}$.
3. En déduire l'expression de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle (4).