Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 17 juin 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Déterminer un primitive des fonctions suivantes :

   (a) $f_1(t) = 3\sin(5t+4)\cos^3(5t+4)$

   (b) $f_2(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

   (c) $f_3(t) = \frac{4t+6}{(t^2+3t+2)^3}$

   (d) $f_4(t) = \frac{2}{9+4t^2}$

2. Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2x}{3t-1} dt$

   (b) $I_2 = \int_{-10}^{10} t^2\sin(t^3) + 1 dt$

   (c) $I_3 = \int_{-1}^{0} te^{3t+1} dt$

   (d) $I_4 = \int_{0}^{2\pi} \sin(t)\cos(2t) dt$

Exercice 2

1. (a) Soit $X > 1$. Calculer $I = \int_1^X \frac{1}{(t+1)(t-2)} dt$.

   (b) En déduire la nature (convergente ou divergente) de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t-2)} dt$.

2. Pour chacune des intégrales suivantes dire, en justifiant votre réponse, si elle est convergente ou divergente.

   (a) $J_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^3} dt$

   (b) $J_2 = \int_0^{10} \frac{1}{t^2} dt$

   (c) $J_3 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

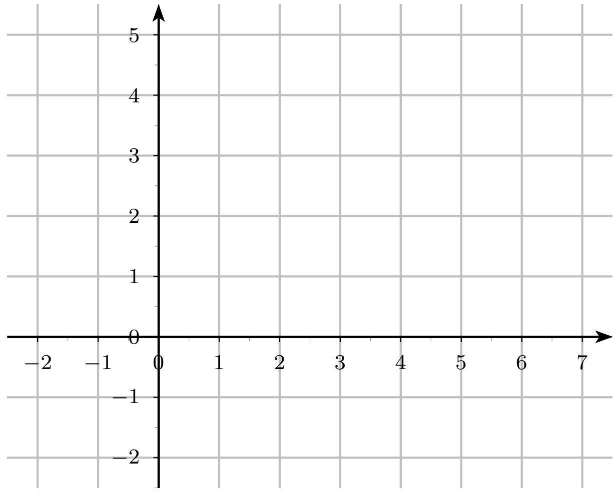
   (d) $J_4 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 3

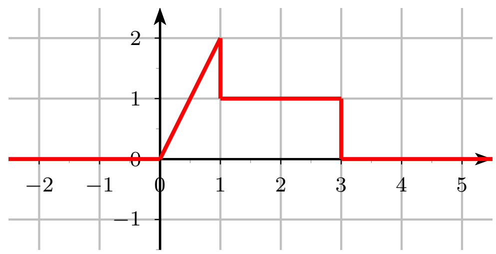
1. Soit $f(t) = 2\mathcal{U}(t-1) + (t-3)\mathcal{U}(t-3) - (3t-6)\mathcal{U}(t-4) + (2t-4)\mathcal{U}(t-5)$

   (a) Donner une écriture de la fonction f sans utiliser la fonction échelon $\mathcal{U}$.

   (b) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique ci-dessous.



2. Définir la fonction suivante par une seule égalité (et donc en utilisant la fonction échelon $\mathcal{U}$).



Exercice 4

1. Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

   (a) $g_1(t) = te^{-2t}\mathcal{U}(t)$ (b) $g_2(t) = (t+5)\mathcal{U}(t-3)$

2. Calculer la transformée de Laplace inverse de :

   (a) $F(p) = \frac{2}{p} + \frac{6}{p^4}$ (b) $G(p) = \frac{1}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+9}$

Exercice 5 On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\begin{cases} f'(t) + 3f(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t) \\ f(0) = 4 \end{cases} \tag{E}$$

1. Détermination de la transformée de Laplace F de f :
   (a) Calculer en fonction de $F(p)$: $\mathcal{L}_{f'(t)}(p)$ puis $\mathcal{L}_{f'(t)+3f(t)}(p)$.
   (b) Calculer $\mathcal{L}_{e^{2t}\mathcal{U}(t)}(p)$.
   (c) Appliquer la transformée de Laplace à l'équation (E) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p.
2. Détermination de f :
   On admet que F peut s'écrire sous la forme : $F(p) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{p-2} + \frac{19}{5} \times \frac{1}{p+3}$.
   En déduire l'expression de $f(t)$ pour t positif.