

# Mathématiques - Devoir Surveillé 3

## Vendredi 17 mai 2019 - Durée : 1h30

*Tous documents et appareils électroniques sont interdits*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

### Exercice 1

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $U_0$ .

1. Déterminer  $q$  et  $U_0$  sachant que  $U_3 = \frac{1}{32}$  et  $U_6 = \frac{1}{2048}$ .
2. Déterminer, en fonction de  $N$ , la valeur de  $S_N = \sum_{k=2}^N U_k$ .
3. Que vaut la limite de  $S_N$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$  ?

**Exercice 2** Dire si les suites suivantes sont arithmétiques, géométriques ou ni l'une ni l'autre et préciser, le cas échéant, la valeur de la raison.

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| 1. $U_n = n^3$                          | 3. $U_n = \frac{5}{\sqrt{3^{4n}}}$ |
| 2. $U_n = (2n + 1)^2 - (n + 2)(1 + 4n)$ | 4. $U_n = e^{-2n}$                 |

**Exercice 3** Calculer les intégrales suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $I = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$            | 5. $M = \int_0^2  t^2 - 3t + 2  dt$                            |
| 2. $J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4(x) \cos(x) dx$ | 6. $N = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$           |
| 3. $K = \int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx$          | 7. $P = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$                         |
| 4. $L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx$         | (on pourra effectuer le changement de variable $x = \sin(u)$ ) |

**Exercice 4** Soit  $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)(x^2 + 2x + 2)}$

1. Faire la D.E.S. de  $f(x)$
2. Montrer qu'une primitive de  $\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$  est  $\arctan(x + 1)$ .
3. En déduire une primitive  $F(x)$  de  $f(x)$ .

**Exercice 5**

1. Montrer que  $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$
2. Déterminer une primitive de  $\frac{x^3}{1+x^2}$
3. En effectuant une intégration par parties, calculer  $\int_{-1}^1 x^2 \arctan(x) dx$
4. Aurait-on pu prévoir le résultat précédent ?