Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - CORRECTION
Vendredi 8 juin 2018 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle est convergente ou divergente :
   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente d'après le critère de Riemann.
   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est divergente d'après le critère de Riemann.
   (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt$ est convergente d'après le critère de Riemann.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est convergente.
   On sait que $\sin(X) \underset{0}{\sim} X$ donc $\sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ et donc $\frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.
   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge d'après Riemann, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge aussi par équivalence.
3. (a) Soit $X > 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^{X} \frac{1}{(2x+1)^2+1}\, dx$.
   $$\int_1^{X} \frac{1}{(2x+1)^2+1}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{2}{(2x+1)^2+1}\, dx = \left[\frac{1}{2}\arctan(2x+1)\right]_1^X = \frac{1}{2}\arctan(2X+1) - \frac{1}{2}\arctan(3)$$
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2+1}\, dx$ est convergente.
   $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2+1}\, dx = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{2}\arctan(2X+1) - \frac{1}{2}\arctan(3) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan(3)$$
   Donc l'intégrale converge (vers $\frac{\pi}{4} - \arctan(3)$).
4. Les affirmations suivantes sont fausses. Trouver dans chacun des cas un contre-exemple le prouvant.
   (a) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.
   La fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ est un contre-exemple. On a bien $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ mais $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.
   (b) Soit f et g deux fonctions telles que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq 1$. Alors :
   $$\int_1^{+\infty} g(t)\, dt \text{ diverge } \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\, dt \text{ diverge.}$$
   Les fonctions $f(t) = \frac{1}{t^2}$ et $g(t) = \frac{1}{t}$ donnent un contre-exemple. On a bien $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq 1$, et $\int_1^{+\infty} g(t)\, dt$ diverge mais $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge .

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes par la méthode de votre choix :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\sin(x)\,dx$. On utilise la formule de la primitive de $u'u^2$:

$$I = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3}\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right) = \frac{2}{3}$$

2. $J = \displaystyle\int_0^{1} x e^{x^2+2}\,dx$. On utilise la formule de la primitive de $u'e^u$:

$$J = \left[\frac{1}{2}e^{x^2+2}\right]_0^{1} = \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)$$

3. $K = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x)\sin(2x)\,dx$. la fonction est impaire et l'intervalle est centré en 0 donc

$$K = 0$$

4. $L = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (-x+1)e^{2x}\,dx$. On fait une intégration par parties. On pose

$$u(x) = -x+1 \qquad et \qquad v'(x) = e^{2x}$$

donc

$$u'(x) = -1 \qquad et \qquad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Par I.P.P :

$$L = \left[(-x+1)\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

Donc

$$L = \left[(-x+1)\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{2} - \frac{3}{4}$$

5. $M = \displaystyle\int_0^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$. On utilise la formule de la primitive de $\dfrac{u'}{u}$:

$$M = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|\right]_0^{1} = \frac{1}{2}\left(\ln(6) - \ln(3)\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Exercice 3

1. Montrer que $2t^2+17t+36=(2t+9)(t+4)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^8 \frac{t}{2t^2+17t+36}dt=-4\ln(12)-\frac{9}{2}\ln(11)+13\ln(5)$. Il faut faire une D.E.S :

$$\begin{aligned}
\int_1^8 \frac{t}{2t^2+17t+36}dt &= \int_1^8 \frac{t}{(2t+9)(t+4)}dt \\
&= \int_1^8 \frac{a}{2t+9}+\frac{b}{t+4}dt \\
&= \int_1^8 \frac{9}{2t+9}+\frac{-4}{t+4}dt \\
&= \left[\frac{9}{2}\ln|2t+9|-4\ln|t+4|\right]_1^8 \\
&= \frac{9}{2}\ln(25)-4\ln(12)-\frac{9}{2}\ln(11)+4\ln(5) \\
&= 9\ln(5)-4\ln(12)-\frac{9}{2}\ln(11)+4\ln(5) \\
&= -4\ln(12)-\frac{9}{2}\ln(11)+13\ln(5)
\end{aligned}$$

3. Calculer $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{x^5}{2x^6+17x^3+36}dx$ en posant le changement de variable $t=x^3$.
   - Les bornes : comme x varie de 1 à 2, t varie de $1^3=1$ à $2^3=8$.
   - relation entre dx et dt : $t=x^3 \Rightarrow dt=3x^2dx$.

   Par changement de variable on obtient

$$I=\int_1^2 \frac{1}{3}\frac{x^2}{2x^6+17x^3+36}3x^2dx=\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{x^3}{2(x^3)^2+17x^3+36}3x^2dx=\frac{1}{3}\int_1^8 \frac{t}{2t^2+17t+36}dt$$

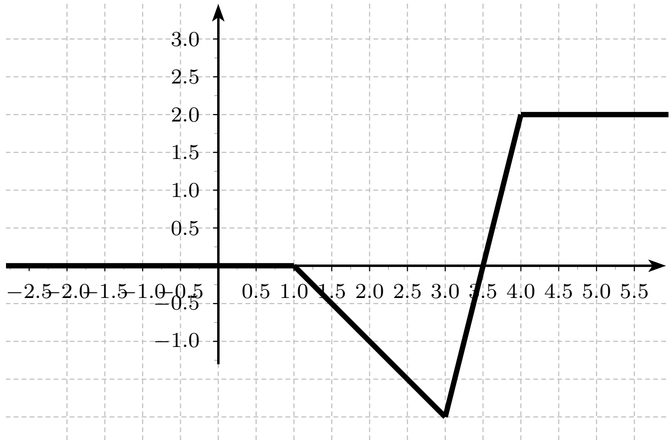
   D'après la question 2, on a donc

$$I=\frac{1}{3}\left(-4\ln(12)-\frac{9}{2}\ln(11)+13\ln(5)\right)$$

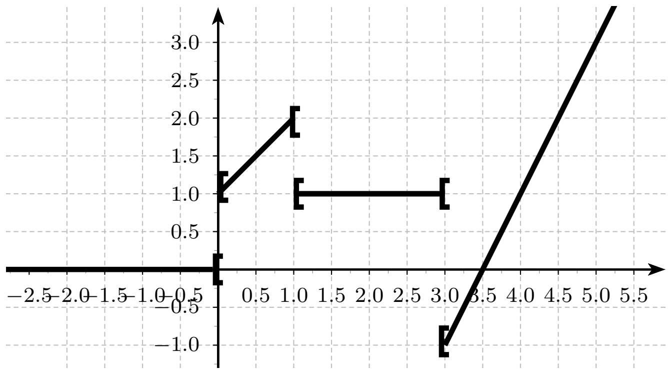
Exercice 4

1. Tracer, en justifiant votre démarche, la courbe représentative de la fonction :

$$f(t)=(-t+1)\mathcal{U}(t-1)+(5t-15)\mathcal{U}(t-3)+(16-4t)\mathcal{U}(t-4)=\left\{\begin{array}{ccc} 0 & si & t<1 \\ -t+1 & si & t\in[1;3[\\ 4t-14 & si & t\in[3;4[\\ 2 & si & t\geq 4 \end{array}\right.$$



2. Donner l'expression de la fonction suivante à l'aide de fonctions échelon :



On peut lire que $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ t+1 & si \quad t \in [0;1[\\ 1 & si \quad t \in [1;3[\\ 2t-7 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$ .Donc

$$f(t) = (t+1)\mathcal{U}(t) + (-t)\mathcal{U}(t-1) + (2t-8)\mathcal{U}(t-3)$$

Exercice 5

1. Démontrer, en partant de la définition, que la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$ est $\mathcal{L}_f(p) = \dfrac{1}{p+a}$.
2. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(t) = e^2\mathcal{U}(t)$.
   $$\mathcal{L}_{f_1}(p) = \frac{e^2}{p}$$
   (b) $f_2(t) = (2t+1)^2\mathcal{U}(t) = (4t^2+4t+1)\mathcal{U}(t)$
   $$\mathcal{L}_{f_2}(p) = 4 \times \frac{2}{p^3} + 4 \times \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$
   (c) $f_3(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}(t) = -\sin(3t)\mathcal{U}(t)$
   $$\mathcal{L}_{f_3}(p) = \frac{-3}{p^2+9}$$