Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - Sujet 1
Vendredi 8 juin 2018 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle est convergente ou divergente :

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$

2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt$ est convergente.

3. (a) Soit $X > 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^{X} \frac{1}{(2x+1)^2+1}\,dx$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2+1}\,dx$ est convergente.

4. Les affirmations suivantes sont fausses. Trouver dans chacun des cas un contre-exemple le prouvant.

   (a) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

   (b) Soit f et g deux fonctions telles que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq 1$. Alors :

$$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt \text{ diverge } \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \text{ diverge.}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes par la méthode de votre choix :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\sin(x)\,dx$
2. $J = \displaystyle\int_0^{1} xe^{x^2+2}\,dx$
3. $K = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x)\sin(2x)\,dx$
4. $L = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (-x+1)e^{2x}\,dx$
5. $M = \displaystyle\int_0^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

Exercice 3

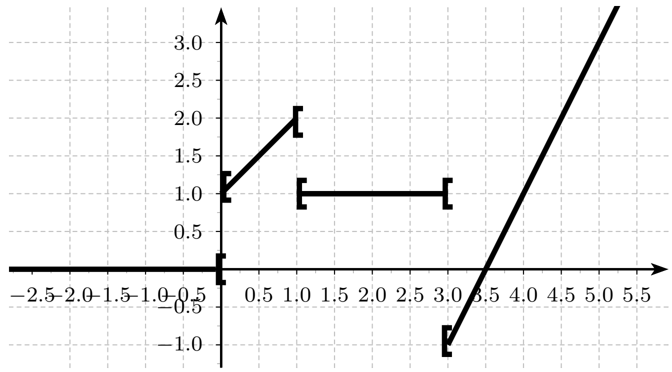
1. Montrer que $2t^2 + 17t + 36 = (2t+9)(t+4)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{8} \frac{t}{2t^2+17t+36}dt = -4\ln(12) - 9\ln(11) + 22\ln(5)$
3. Calculer $I = \displaystyle\int_1^{2} \frac{x^5}{2x^6+17x^3+36}dx$ en posant le changement de variable $t = x^3$.

Exercice 4

1. Tracer, en justifiant votre démarche, la courbe représentative de la fonction :

$$f(t) = (-t+1)\mathcal{U}(t-1) + (5t-15)\mathcal{U}(t-3) + (16-4t)\mathcal{U}(t-4)$$

2. Donner l'expression de la fonction suivante à l'aide de fonctions échelon :



Exercice 5

1. Démontrer, en partant de la définition, que la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$ est $\mathcal{L}_f(p) = \dfrac{1}{p+a}$.
2. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(t) = e^2\mathcal{U}(t)$
   (b) $f_2(t) = (2t+1)^2\mathcal{U}(t)$
   (c) $f_3(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}(t)$