Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 2 juin 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions 1., 2. et 3. suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{3} \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

(a) Calculez u_1, u_2 et u_3.
On a :

$$u_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \qquad u_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1, \qquad u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

(b) Montrez que la suite $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n.$$

On en déduit que v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. De plus, $v_0 = u_0 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

(c) En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.
Exprimons tout d'abord v_n en fonction de n :

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{4}{3}.$$

D'où $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}$ puisque $u_n = v_n + \dfrac{2}{3}$.

(d) Calculez $u_2 + u_3 + \cdots + u_{100}$ (on simplifiera l'expression obtenue au maximum !).
On a

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_{100} = \frac{4}{3}\sum_{k=2}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=2}^{100}\frac{2}{3}.$$

Or,

$$\frac{4}{3}\sum_{k=2}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1 - 1/2^{99}}{1 - 1/2} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{99}}\right)$$

et

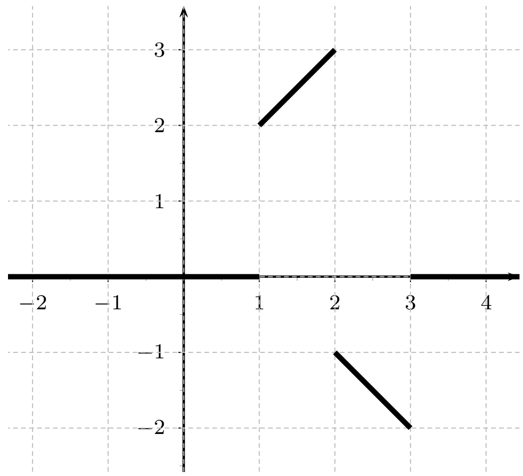
$$\sum_{k=2}^{100}\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{3} \text{ (on somme 99 fois } \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \times 99.$$

D'où
$$u_2 + u_3 + \cdots + u_{100} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{99}}\right) + 66.$$

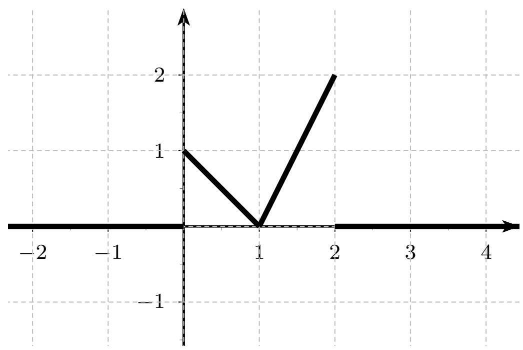
2. On considère la suite définie par $w_n = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$.
   (a) Exprimez w_n sans utiliser le symbole $\sum$.
   On a $w_n = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$.
   (b) La suite (w_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Si oui, on précisera la raison.
   On a
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - 1/3^n}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$
   On en déduit que
   $$w_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = -\frac{1}{2 \times 3^n} = -\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}.$$
   Il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
3. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 12$ et $u_8 = 0$. Exprimez u_n en fonction de n.
   On a
   $$u_8 = u_3 + 5r = 12 + 5r = 0.$$
   On en déduit que $r = -\frac{12}{5}$. De plus,
   $$u_3 = u_0 + 3r = u_0 - \frac{36}{5} = 12.$$
   D'où $u_0 = \frac{96}{5}$. On a donc $u_n = \frac{96}{5} - \frac{12n}{5}$.

Exercice 2 Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f :
   $$f(t) = (t+1)\mathcal{U}(t-1) - 2t\mathcal{U}(t-2) + (t-1)\mathcal{U}(t-3)$$
   On détermine d'abord l'expression de f par parties :
   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ t+1 & \text{si} \quad t \in [1;2[\\ -t+1 & \text{si} \quad t \in [2;3[\\ 0 & \text{si} \quad t \geq 3 \end{cases}$$
   On en déduit la représentation graphique de f



2. Déterminer, en utilisant la fonction échelon, l'expression de la fonction g dont la courbe est



On détermine d'abord l'expression de chaque partie de la représentation de f :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ -t+1 & \text{si} \quad t \in [0;1[\\ 2t-2 & \text{si} \quad t \in [1;2[\\ 0 & \text{si} \quad t \geq 2 \end{cases}$$

On en déduit que f peut s'écrire

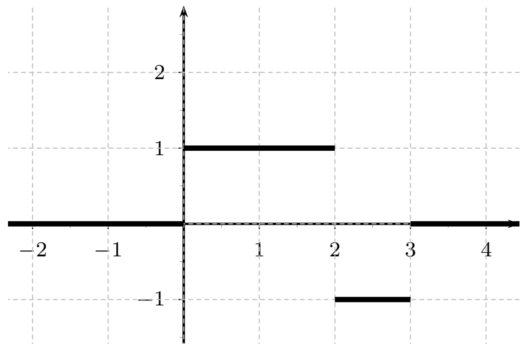
$$f(t) = (-t+1)\left(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right) + (2t-2)\left(\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)\right)$$

ou encore

$$f(t) = (-t+1)\mathcal{U}(t) + (3t-3)\mathcal{U}(t-1) + (-2t+2)\mathcal{U}(t-2)$$

Exercice 3 Déterminer la transformée de Laplace pour chacune des fonctions suivantes :

1. f est la fonction nulle sur $]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$ et dont la courbe est



Pour calculer cette transformée de Laplace on peut revenir à la définition :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f(p) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^2 1\times e^{-pt}dt + \int_2^3 (-1)\times e^{-pt}dt \\ &= \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^2 + \left[\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_2^3 \\ &= -\frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-3p} - \frac{1}{p}e^{-2p} \\ &= -\frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-3p}\end{aligned}$$

On pouvait aussi exprimer f avec la fonction echelon puis utiliser la propriété du retard

$$f(t) = \mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)$$

La transformée de $U(t)$ est $\dfrac{1}{p}$,

la transformée de l'echelon retardé de 2 est $\dfrac{1}{p}e^{-2p}$

et la transformée de l'echelon retardé de 3 est $\dfrac{1}{p}e^{-3p}$. Donc

$$\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p} - 2\times\frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p}e^{-3p}$$

2. $g(t) = \dfrac{t^4-6t}{3}\times\mathcal{U}(t) = \dfrac{1}{3}t^4\mathcal{U}(t) - 2t\mathcal{U}(t)$. Donc

$$\mathcal{L}_g(p) = \frac{1}{3}\times\frac{24}{p^5} - 2\times\frac{1}{p^2} = \frac{8}{p^5} - \frac{2}{p^2}$$

3. $h(t) = e^{3t}\times\mathcal{U}(t-2) = h_0(t-2)$ où

$$\begin{aligned}h_0(t) &= h(t+2) \\ &= e^{3(t+2)}\times\mathcal{U}(t+2-2) \\ &= e^6\times e^{3t}\times\mathcal{U}(t)\end{aligned}$$

Or
$$\mathcal{L}_{h_0}(p) = e^6 \times \frac{1}{p-3}$$
Donc
$$\mathcal{L}_h(p) = e^{-2p} \times \mathcal{L}_{h_0}(p) = e^{-2p}\left(e^6 \times \frac{1}{p-3}\right)$$

4. $k(t) = e^{-3t}\sin(5t)\mathcal{U}(t) = e^{-3t} \times k_0(t)$ où
$$k_0(t) = \sin(5t)\mathcal{U}(t)$$
Or
$$\mathcal{L}_{k_0}(p) = \frac{5}{p^2+25}$$
Donc
$$\mathcal{L}_k(p) = \mathcal{L}_{k_0}(p+3) = \frac{5}{(p+3)^2+25}$$

5. Sachant qu'on a la formule $\mathcal{L}_{tf(t)}(p) = -\mathcal{L}'_{f(t)}(p)$ calculons la transformée de $v(t) = t\cos(2t)\mathcal{U}(t)$:

On a
$$v(t) = t \times v_0(t) \qquad \text{où} \qquad v_0(t) = \cos(2t)\mathcal{U}(t)$$
Or
$$\mathcal{L}_{v_0}(p) = \frac{p}{p^2+4}$$
Et
$$\mathcal{L}'_{v_0}(p) = \frac{(p^2+4) - p \times 2p}{(p^2+4)^2} = \frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}$$
Donc
$$\mathcal{L}_v(p) = \mathcal{L}_{tv_0(t)}(p) = -\mathcal{L}'_{v_0}(p) = -\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}$$

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. (a) Soit $X > 1$. Calculez $\displaystyle\int_1^X e^{-t}dt$.

On a
$$\int_1^X e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_1^X = -e^{-X} + e^{-1}.$$
En faisant tendre X vers $+\infty$, on en déduit que
$$\lim_{X\to\infty}\int_1^X e^{-t}dt = \int_1^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-1}.$$

(b) En déduire la nature⋆ de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}|\cos(t)|dt$.

On a $0 \leq e^{-t}|\cos(t)| \leq e^{-t}$. Or, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge. Par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}|\cos(t)|dt$ converge.

2. (a) Soit $X > e$. Calculez $\displaystyle\int_e^X \frac{1}{t\ln^2(t)}dt$ en posant le changement de variable $u = \ln(t)$.

   On a
$$\int_e^X \frac{1}{t\ln^2(t)}dt = \int_1^{\ln(X)} \frac{1}{u^2}du = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{\ln(X)} = -\frac{1}{\ln(X)} + 1$$

   (b) En déduire la nature* de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt$.

   On en déduit que l'intégrale converge car $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt = \lim_{X\to\infty} -\frac{1}{\ln(X)} + 1 = 1$.

3. Déterminer la nature* des intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{(t+3)(t+1)}dt$,

   On a que $\displaystyle\frac{t+1}{(t+3)(t+1)} \sim_{+\infty} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$. Or $\displaystyle\frac{1}{t}$ est le terme général d'une intégrale de Riemann divergente. Par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{(t+3)(t+1)}dt$ diverge.

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}dt$,

   D'après les croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t^2e^{-t^2}}{\sqrt{t}} = 0$. On a donc pour t suffisamment grand que $\displaystyle\frac{t^2e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^2}$. Or $\displaystyle\frac{1}{t^2}$ est le terme général d'une intégrale de Riemann convergente. Par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

   (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$.

   D'après le cours, on a $\displaystyle\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$, d'où $\displaystyle\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$. Or $\displaystyle\frac{1}{t^{3/2}}$ est le terme général d'une intégrale de Riemann convergente. Par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$ converge

4. (a) Soit $X > 1$. Montrez que :
$$\int_1^X \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{t^2}dt.$$

   Il suffit de faire une intégration par partie.

   (b) En déduire la nature* de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.

   En passant à la limite dans l'égalité précédente, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ converge.

* dire si l'intégrale converge ou diverge.