Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 2 juin 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions 1., 2. et 3. suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{3} \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

   (a) Calculez u_1, u_2 et u_3.

   (b) Montrez que la suite $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   (c) En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.

   (d) Calculez $u_2 + u_3 + \cdots + u_{100}$ (on simplifiera l'expression obtenue au maximum !).

2. On considère la suite définie par $w_n = -\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3^k}$.

   (a) Exprimez w_n sans utiliser le symbole $\sum$.

   (b) La suite (w_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Si oui, on précisera la raison.

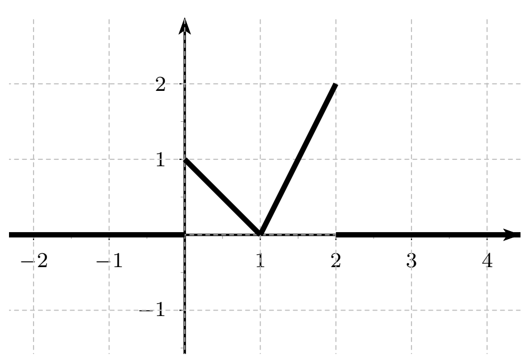
3. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 12$ et $u_8 = 0$. Exprimez u_n en fonction de n.

Exercice 2 Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f :

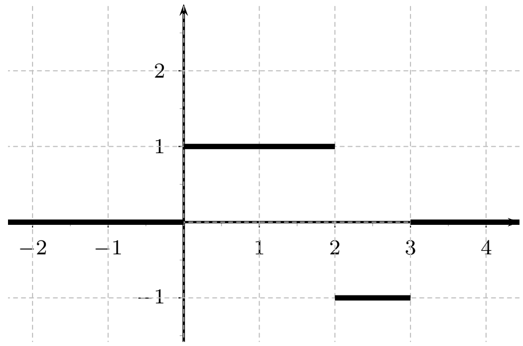
$$f(t) = (t+1)\mathcal{U}(t-1) - 2t\mathcal{U}(t-2) + (t-1)\mathcal{U}(t-3)$$

2. Déterminer, en utilisant la fonction échelon, l'expression de la fonction g dont la courbe est



Exercice 3 Déterminer la transformée de Laplace pour chacune des fonctions suivantes :

1. f est la fonction nulle sur $]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$ et dont la courbe est



2. $g(t) = \dfrac{t^4 - 6t}{3} \times \mathcal{U}(t)$
3. $h(t) = e^{3t} \times \mathcal{U}(t-2)$.
4. $k(t) = e^{-3t}\sin(5t)\mathcal{U}(t)$.
5. Sachant qu'on a la formule suivante :

$$\mathcal{L}_{tf(t)}(p) = -\mathcal{L}'_{f(t)}(p)$$

que l'on peut traduire par : la transformée de Laplace de t fois $f(t)$ est l'opposée de la dérivée de la transformée de f.
Calculer la transformée de $v(t) = t\cos(2t)\mathcal{U}(t)$.

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. (a) Soit $X > 1$. Calculez $\displaystyle\int_1^X e^{-t}dt$.

   (b) En déduire la nature* de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}|\cos(t)|dt$.

2. (a) Soit $X > e$. Calculez $\displaystyle\int_e^X \frac{1}{t\ln^2(t)}dt$ en posant le changement de variable $u = \ln(t)$.

   (b) En déduire la nature* de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt$.

3. Déterminer la nature* des intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{(t+3)(t+1)}dt$, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}dt$, (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$.

4. (a) Soit $X > 1$. Montrez que :

$$\int_1^X \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{t^2}dt.$$

   (b) En déduire la nature* de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.

* dire si l'intégrale converge ou diverge.