

Nom :

Prénom :

Groupe :

## Mathématiques - Devoir Surveillé 2

### Vendredi 22 avril 2022 - Durée : 1h30

*Tout document et appareil électronique est interdit*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

#### Exercice 1

1. Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

(a)	(b)	(c)
$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = -10 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 25x + 20y = 30 \end{cases}$

2. Soient les matrices  $A$  et  $B$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & c \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que  $B$  soit l'inverse de  $A$ .

(b) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

#### Exercice 2

1. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice inverse de  $A$  et de  $B$ .

3. Donner un exemple de matrice de taille 2 non inversible.

**Exercice 3** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient  $P(X) = X^3 + X + 1$  et  $Q(X) = X^4 - 3X^3 + 2X$ .

Donner le degré de  $P \times Q$  et  $P \circ Q$ .

2. Soit

$$P(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 4X + 8$$

(a) Montrer que 2 est racine de  $P$ .

(b) Effectuer la division euclidienne de  $X^4 + 3X^2 - 4$  par  $X^2 + 4$ .

(c) En déduire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}$ .

3. Donner un exemple de polynôme vérifiant toutes les conditions suivantes :

- $P$  est à coefficient réels
- $2 + i$  est racine simple de  $P$
- $-3$  est racine de multiplicité 3 de  $P$
- $P$  est de degré 6

**Exercice 4** On considère les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X + 2}{(X - 1)(X - 2)} \quad F_2(X) = \frac{X + 2}{(X + 1)^2(X - 2)}$$

$$F_3(X) = \frac{2X^2 + 1}{(X^2 + 1)(X - 2)} \quad F_4(X) = \frac{X^6 + X - 1}{X^5 - 4X^4 + 3X^3}$$

1. Faire la DES de  $F_1$ .
2. Donner la forme de la DES de  $F_2$  (on ne demande pas la valeur des coefficients).
3. Faire la DES de  $F_3$ .
4. Donner la forme de la DES de  $F_4$  (on ne demande pas la valeur des coefficients).