Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 2 mars 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 2x - 2y - 2z = 2 \\ -x + 2y + 5z = 6. \end{cases}$$

Résolution :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \quad (L_1) \\ 2x - 2y - 2z = 2 \quad (L_2) \\ -x + 2y + 5z = 6 \quad (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 5 \quad (L_1 \text{ pivot }) \\ -8z = -8 \quad (L_2 - 2L_1) \\ y + 8z = 11 \quad (L_3 + L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ z = 1 \\ y + 8z = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ z = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ z = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

La solution du système est $(5, 3, 1)$.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est inversible.

$$det(A) = 1 \times 8 - (-3) \times 3 = 17 \neq 0$$

donc A est inversible.

(b) Déterminer la matrice inverse de A par la méthode de votre choix.

On sait que, si A est inversible alors $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}\ {}^tCo(A)$.

$$Co(A) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$^tCo(A) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Résoudre le système suivant en utilisant A^{-1} :

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -3x + 8y = 2 \end{cases}$$

Le système s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour résoudre, il suffit de calculer :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 34 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la solution est $(2, 1)$.

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes

On considère les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \\ 5 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Parmi les 5 matrices, quelles sont celles qui sont inversibles ?

- Pour qu'une matrice soit inversible, il faut qu'elle soit carrée, donc B, D et E ne sont pas inversibles.

- On calcule les déterminants de A et C :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-3) \times 1 = 11 \neq 0$$

donc A est inversible.

$$det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 22 + 3 \times 5 = 59$$

donc C est inversible.

2. Parmi les calculs suivants, dire ceux qui sont réalisables (sans faire les calculs) :

$$A+B \qquad D\times C \qquad E\times A \qquad A\times E \qquad B\times B \qquad 6\times D$$

- $A+B$: **Pas possible** car A et B n'ont pas les mêmes dimensions.
- $D\times C$: **Possible** car le nombre de colonnes de D est égal au nombre de lignes de C.
- $E\times A$: **Possible** car le nombre de colonnes de E est égal au nombre de lignes de A.
- $A\times E$: **Pas possible** car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de E.
- $B\times B$: **Pas possible** car B n'est pas carrée.
- $6\times D$: **Possible** car on peut toujours multiplier une matrice par un réel.

3. Calculer $B\times A$

$$B\times A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2 - 1\times -3 & 3\times 1 - 1\times 4 \\ -6\times 2 + 2\times -3 & -6\times 1 + 2\times 4 \\ 4\times 2 + 0\times -3 & 4\times 1 + 0\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -18 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Soit le polynôme $P(X) = X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 28X^2 + 36X + 16$

1. Montrer que -1 est racine double pour P.

- $P(-1) = -1 + 6 - 13 + 28 - 36 + 16 = 0$ donc -1 est bien racine.
- $P'(X) = 5X^4 + 24X^3 + 39X^2 + 56X + 36$ donc $P'(-1) = 5 - 24 + 39 - 56 + 36 = 0$, donc -1 est racine de multiplicité au moins 2.
- $P''(X) = 20X^3 + 72X^2 + 78X + 56$ donc $P''(-1) = -20 + 72 - 78 + 56 = 30 \neq 0$, donc -1 n'est pas racine triple.

-1 est bien racine double.

2. Calculer $P(2i)$.

$$\begin{aligned} P(2i) &= (2i)^5 + 6(2i)^4 + 13(2i)^3 + 28(2i)^2 + 36(2i) + 16 \\ &= 32i + 96 - 104i - 112 + 72i + 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $2i$ est bien racine.

3. Poser la division euclidienne de P par $X+4$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
X^5 & +6X^4 & +13X^3 & +28X^2 & +36X & +16 & X \quad +4 \\ \cline{7-7}
-(X^5 & +4X^4) & & & & & X^4 \; +2X^3 \; +5X^2 \; +8X+4 \\ \cline{1-2}
 & 2X^4 & +13X^3 & +28X^2 & +36X & +16 & \\
 & -(2X^4 & 84X^3) & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5X^3 & +28X^2 & +36X & +16 & \\
 & & -(5X^3 & +20X^2) & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 8X^2 & +36X & +16 & \\
 & & & -(8X^2 & +32X) & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 4X & +16 & \\
 & & & & -(4X & +16) & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

On en déduit que $P(X)=(X+4)(X^4+2X^3+5X^2+8X+4)+0$.

4. Déduire, des questions précédentes, la factorisation de P dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

- -1 est racine double, donc on peut mettre $(X+1)^2$ en facteur.
- $2i$ est racine donc on peut mettre $(X-2i)$ en facteur.
- P est un polynôme à coefficients réels, donc $-2i$ est aussi racine et on peut mettre $(X+2i)$ en facteur.
- Le reste de la division par $X+4$ est nul, donc on peut mettre $X+4$ en facteur.
- P est de degré 5, donc sa forme factorisée dans $\mathbb{C}$ est

$$P(X)=(X+1)^2(X-2i)(X+2i)(X+4)$$

Et sa forme factorisée dans $\mathbb{R}$ s'obtient en développant : $(X-2i)(X+2i)=X^2+4$; c'est donc

$$P(X)=(X+1)^2(X^2+4)(X+4)$$

Exercice 4 On considère les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X)=\frac{X-5}{(X+2)(X-3)} \qquad F_2(X)=\frac{X^2}{(X-1)(X^2+3X-4)} \qquad F_3(X)=\frac{X^3}{X^3-1}$$

1. Donner **la forme** de la D.E.S de F_1 (on ne demande pas la valeur des coefficients).

- Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.
- Le polynôme $Q(X)=(X+2)(X-3)$ est factorisé dans $\mathbb{R}[X]$
- La forme de la D.E.S est :

$$F_1(X)=\frac{a}{X+2}+\frac{b}{X-3}$$

2. Donner **la forme** de la D.E.S de F_2 (on ne demande pas la valeur des coefficients).

- Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.
- Le polynôme $Q(X) = (X-1)(X^2+3X-4) = (X-1)(X-1)(X+4) = (X-1)^2(X+4)$ est maintenant factorisé dans $\mathbb{R}[X]$
- La forme de la D.E.S est :

$$F_1(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X+4)}$$

3. Déterminer la D.E.S de F_3 (il faut calculer les valeurs des coefficients !).
   - Le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, il faut donc poser la division euclidienne de X^3 par X^3-1. On trouve un reste $R(X) = 1$et un quotient de $E(X) = 1$. Donc

$$F_3(X) = 1 + \frac{1}{X^3-1}$$

   - Le polynôme $Q(X) = X^3-1 = (X-1)(\alpha X^2+\beta X+\gamma)$ car 1 est racine évidente. On détermine $(\alpha X^2+\beta X+\gamma)$ par identification ou avec une division euclidienne. Donc

$$Q(X) = X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

   On ne peut pas factoriser plus dans $\mathbb{R}$ car le discriminant de X^2+X+1 est négatif.
   - La forme de la D.E.S de la partie fractionnaire de F_3 est :

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1} \qquad \star$$

   - Calculons les constantes a, b et c :
   pour a on multiplie la relation $\star$ par $X-1$ puis on pose $X=1$. On trouve $a = \frac{1}{3}$.
   pour b on multiplie la relation $\star$ par X puis on fait tendre X vers $+\infty$. On trouve $b = -a = -\frac{1}{3}$.
   pour c, on pose $X=0$ dans la relation $\star$. On trouve $-1 = -a+c$ donc $c = a-1 = -\frac{2}{3}$.
   - Conclusion : la D.E.S de F_3 est

$$F_3(X) = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{X-1} + \frac{-\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}}{X^2+X+1}$$

Exercice 5

On considère les polynômes suivants

$$P(X) = X^7 - 3X^3 + 1 \qquad Q(X) = X^3 + 4X^2 - 2 \qquad R(X) = X^2 - 6X + 1$$

1. Déterminer le degré des polynômes suivants $P \times Q$, $P \circ R$ et $P+Q+R$.
   - $deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q) = 7 + 3 = 10$
   - $deg(P \circ R) = deg(P) \times deg(R) = 7 \times 2 = 14$,
   - $deg(P+Q+R) = deg(P) = 7$ car le degré de P est strictement supérieur aux degrés de Q et R

2. Déterminer le degré du polynôme $T(X) = Q(X)(X+3) - (X^2-1)R(X)$.
   Comme le degré de $Q(X)(X+3)$ est égal au degré de $(X^2-1)R(X)$, on ne peut pas savoir le degré de T sans développer :

$$\begin{array}{rcl} T(X) & = & Q(X)(X+3) - (X^2-1)R(X) \\ & = & (X^3+4X^2-2)(X+3) - (X^2-1)(X^2-6X+1) \\ & = & X^4+4X^3-2X+3X^3+12X^2-6-(X^4-6X^3+X^2-X^2+6X-1) \\ & = & 13X^3+12X^2-8X-5 \end{array}$$

   Conclusion : $deg(T) = 3$.