Mathématiques - Correction du devoir Surveillé 2
Vendredi 5 avril 2018 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Soit la fonction $F(X) = \dfrac{X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X - 1}{X^3 + 2X^2 + X}$.

1. Déterminer les polynômes $E(X)$ et $D(X)$ tels que $F(X) = E(X) + \dfrac{D(X)}{X^3 + 2X^2 + X}$ avec $deg(D) < 3$.
   Le degré du numérateur n'est pas strictement inférieur au degré du dénominateur donc on pose la division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +4X^3 & +5X^2 & +3X & -1 & X^3 \ +2X^2 \ +X \\ \cline{6-6}
-(X^4 & +2X^3 & +X^2) & & & X+2 \\ \cline{1-3}
 & 2X^3 & +4X^2 & +3X & -1 & \\
 & -(2X^3 & +4X^2 & +2X) & & \\ \cline{2-5}
 & & & X & -1 &
\end{array}
$$

   On en déduit que $X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X - 1 = (X+2)(X^3 + 2X^2 + X) + X - 1$ et donc que :

$$F(X) = X + 2 + \frac{X-1}{X^3 + 2X^2 + X}$$

2. Factoriser le polynôme $Q(X) = X^3 + 2X^2 + X$.

$$
\begin{aligned}
Q(X) &= X^3 + 2X^2 + X \\
&= X(X^2 + 2X + 1) \\
&= X(X+1)^2
\end{aligned}
$$

3. Donner la forme de la D.E.S. de F.
   Le dénominateur admet 0 comme racine simple et -1 comme racine double, donc la forme de la D.E.S de F est

$$F(X) = X + 2 + \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$$

4. Donner la décomposition en éléments simples de F.
   Il reste à calculer les valeurs de a, b et c :
   Pour a, on multiplie la partie fractionnaire de F par X :

$$\frac{X-1}{(X+1)^2} = a + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX}{(X+1)^2}$$

puis on pose $X=0$: on obtient $a=-1$.
Pour c, on multiplie la partie fractionnaire de F par $(X+1)^2$:

$$\frac{X-1}{X}=\frac{a(X+1)^2}{X}+b(X+1)+c$$

puis on pose $X=-1$: on obtient $c=2$.
Pour b, on multiplie la partie fractionnaire de F par X :

$$\frac{X-1}{(X+1)^2}=a+\frac{bX}{X+1}+\frac{cX}{(X+1)^2}$$

puis on fait tendre X vers $+\infty$: on obtient $0=a+b$ et donc $b=1$.
Conclusion :

$$F(X)=X+2-\frac{1}{X}+\frac{1}{X+1}+\frac{2}{(X+1)^2}$$

Exercice 2

On souhaite étudier la propriété suivante :

Le produit de 4 nombres entiers successifs auquel on ajoute 1 est toujours le carré d'un nombre entier $(\star)$

Exemple : $4\times5\times6\times7+1=841=29^2$

1. Soit N un nombre entier et soit $P(N)$ la valeur du produit de N par les 3 entiers suivants plus 1. Montrer que
$$P(N)=N^4+6N^3+11N^2+6N+1$$
Par définition on a $P(N)=N(N+1)(N+2)(N+3)+1$. Il suffit alors de dévelloper...
2. Poser la division euclidienne de P par N^2+3N+1 et donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rrrrr|l}
N^4 & +6N^3 & +11N^2 & +6N & +1 & N^2+3N+1 \\ \cline{6-6}
-(N^4 & +3N^3 & +N^2) & & & N^2+3N+1 \\ \cline{1-3}
 & 3N^3 & +10N^2 & +6N & +1 & \\
 & -(3N^3 & +9N^2 & +3N) & & \\ \cline{2-4}
 & & N^2 & +3N & +1 & \\
 & & -(N^2 & +3N & +1) & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$
On en déduit que $P(N)=(N^2+3N+1)(N^2+3N+1)+0=(N^2+3N+1)^2$.
Le polynôme N^2+3N+1 est factorisable dans $\mathbb{R}$ et admet pour racines $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.
Donc la factorisation de P dans $\mathbb{R}$ est
$$P(N)=\left(N-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(N-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$
3. Dire si la propriété $(\star)$ est vraie ou fausse puis donner la valeur de $\sqrt{15\times16\times17\times18+1}$.
On déduit de la question 2 que
$$N(N+1)(N+2)(N+3)+1=(N^2+3N+1)^2$$

Or $(N^2+3N+1)^2$ est bien le carré d'un nombre entier.
Donc la propriété est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}$.
Donc

$$\sqrt{15\times16\times17\times18+1} = \sqrt{P(15)} = \sqrt{(15^2+3\times15+1)^2} = 225+45+1 = 271$$

Exercice 3 Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

1. Il n'existe pas de polynôme de degré 5 à coefficients réels qui admette 3 comme racine triple et i comme racine double.
   VRAI
   Si P est un polynôme à coefficients réels et que i est racine double, alors $-i$ est aussi racine double.
   La forme factorisée de P contient alors les facteurs : $(X-3)^3$ et $(X-i)^2((x+i)^2$.
   Le polynôme est donc au moins de degré 7.
2. Le reste de la division euclidienne de $P(X) = X^6 - 3X^2 - 3$ par $X-1$ est nul.
   FAUX
   $P(1) = -5 \neq 0$, donc le reste de la division n'est pas nul.
3. Soit P un polynôme. Si $P'(3) = 0$ alors 3 est racine de P de multiplicité au moins 2.
   FAUX
   Contre-exemple : $P(X) = X^2 - 6X + 1$. On a $P(3) = -8 \neq 0$ donc 3 n'est pas racine, et pourtant $P'(X) = 2X - 6$ et donc $P'(3) = 0$.
4. Il existe un polynôme P tel que $P(X^3+1) = X^3P(X)$.
   VRAI : Il suffit de prendre $P(X) = 0$.
   Cependant, on peut montrer qu'il n'en n'existe pas d'autre. On pose $n = deg(P)$.
   Alors $deg(P(X^3+1)) = 3n$ et $deg(X^3P(X)) = n+3$. Pour que l'égalité soit vraie il faut que les degrés soient les mêmes. Or
   $$3n = n+3 \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}$$
   Ce qui est impossible.
5. La forme de la D.E.S. de $F(X) = \dfrac{2X-7}{(X+1)(X^2+3X+1)}$ est $F(X) = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X^2+3X+1}$.
   FAUX
   Le polynôme X^2+3X+1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}$ (son discriminant est positif). Le deuxième élément simple n'est donc pas bon, il faut 3 éléments simples en tout.

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer les déterminants de $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 7 \times (-3) - 2 \times (-3) = -21 + 6 = -15$$

et, pour le déterminant de B on peut développer (par exemple) par rapport à la deuxième colonne

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2(10+9) - 3(5-12) = -38 + 21 = -17$$

2. Déterminer la matrice inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

méthode 1 : Avec la comatrice : $B^{-1} = \dfrac{1}{det(B)} {}^t(Co(B))$

Or $det(B) = 2$ et

$$Co(B) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$B^{-1} = \frac{1}{2} {}^t\begin{pmatrix} 6 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

méthode 2 : Avec le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_2 - 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad L_2 \longleftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & -3 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftarrow 3L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow \frac{L_1}{3} \\ L_2 \longleftarrow \frac{L_2}{6} \\ L_3 \longleftarrow -\frac{L_3}{2} \end{array}$$

3. Donner une matrice de taille 3 dont le déterminant vaut -3.

   La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

   On aurait aussi pu prendre $D = \dfrac{3}{17}B$

4. Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} & y & +z & = & 1 \\ 2x & -y & +5z & = & -7 \\ x & +2y & +4z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +4z & = & 0 \\ 2x & -y & +5z & = & -7 \\ & y & +z & = & 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +4z & = & 0 & L_1 \text{ pivot} \\ & -5y & -3z & = & -7 & L_2 - 2L_1 \\ & y & +z & = & 1 & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +4z & = & 0 & \\ & -5y & -3z & = & -7 & L_2 \text{ pivot} \\ & & 2z & = & -2 & L_2 + 5L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +4z & = & 0 \\ & -5y & -3z & = & -7 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +4z & = & 0 \\ & & y & = & 2 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 2 \\ z & = & -1 \end{cases}$$

   La solution du système est $(0, 2, -1)$.