Mathématiques - Correction Devoir Surveillé 2 - Sujet 2
Vendredi 6 avril 2018 - Durée : 1h15

Exercice 1 Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

1. **Montrez que -1 est racine double de P.**
   Par le calcul, on trouve que :
   $$P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0.$$
   On a $P'(X) = 4X^3+6X^2+4X+2$ et $P''(X) = 12X^2+12X+4$, d'où $P'(-1) = 0$ et $P''(-1) = 4 \neq 0$.
2. **Effectuez la division euclidienne de P par $X - i$.**
   En posant la division euclidienne, on trouve :
   $$P(X) = (X - i)(X^3 + (2 + i)X^2 + (1 + 2i)X + i)$$
   On remarque que le reste est nul : i est racine de P.
3. **Sans poser la division euclidienne de P par $X+i$, justifiez pourquoi le reste est forcément nul.**
   Le polynôme P admet i comme racine et donc comme P est un polynôme à coefficients réels, $\bar{i} = -i$ est aussi racine de P : on peut factoriser P par $X + i$ ce qui veut dire que le reste dans la division euclidienne de P par $X + i$ est nul.

   On peut également dire :

   On verifie par le calcul que $P(-i) = 0$, c'est-à-dire $-i$ est racine de P. On peut alors factoriser P par $X + i$ et donc le reste dans la division euclidienne de P par $X + i$ est nul.
4. **Déterminez les racines du polynômes P dans $\mathbb{C}$.**
   Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont -1, i et $-i$.
5. **En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.**
   La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est : $P(X) = (X + 1)^2(X - i)(X + i)$.
   La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est : $P(X) = (X + 1)^2(X^2 + 1)$.

Exercice 2

Il s'agit d'un exercice du polycopié d'exercices

On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) \qquad (\star)$$

1. **Soit P un polynôme non nul qui vérifie $(\star)$. Montrez que le degré de P est égal à 2.**
   Soit P un polynôme non nul. On note $n = \deg(P)$ le degré du polynôme P. D'après le cours, on a $\deg(P(X^2)) = \deg(X^2) \times \deg(P) = 2n$ et $\deg((X^2 + 1)P(X)) = \deg(X^2 + 1) + \deg(P) = n + 2$. Si P vérifie $(\star)$, on a :
   $$\deg(P(X^2)) = \deg((X^2 + 1)P(X)) \iff 2n = n + 2 \iff n = 2$$

2. **En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant $(\star)$.**
Soit P un polynôme non nul qui vérifie $(\star)$. D'après la question précédente, $\deg(P) = 2$. On cherche donc P sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition sur les coefficients a, b et c le polynôme P vérifie $(\star)$?
On a $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et $(X^2 + 1)P(X) = aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c$. Si P vérifie $(\star)$, alors :

$$aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c \iff bX^3 + (a + c - b)X^2 + bX = 0$$

Par identification, on en déduit :

$$b = 0 \text{ et } a + c - b = 0 \iff b = 0 \text{ et } a = -c$$

Les polynômes qui vérifient $(\star)$ sont donc de la forme $P(X) = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. **Donnez la forme de la décomposition en élément simples (DES) dans $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :**

(a) $F_1(X) = \dfrac{X^3}{1 + X}$
Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur donc on doit effectuer une division euclidienne. On trouve que F_1 est de la forme :

$$F_1(X) = aX^2 + bX + c + \frac{d}{X + 1}$$

(b) $F_2(X) = \dfrac{2}{X^3 - X}$
On factorise le dénominateur : $X^3 - X = X(X^2 - 1) = X(X - 1)(X + 1)$. Il y a trois racines simples : 0, 1 et -1. La forme de la DES est donc :

$$F_2(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}$$

(c) $F_3(X) = \dfrac{2X + 1}{X^3(X^2 + 1)}$
La forme de la DES est :

$$F_3(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{dX + e}{X^2 + 1}$$

2. **Calculez les constantes dans la DES de F_1 et F_2.**
DES de F_1 : *le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur donc on en doit effectuer une division euclidienne. On trouve :*

$$X^3 = (1 + X)(X^2 - X + 1) - 1$$

En divisant à gauche et à droite par X+1, on trouve $F_1(X) = X^2 - X + 1 - \dfrac{1}{X + 1}$.

DES de F_2 : on trouve $F_2(X) = -\dfrac{2}{X} + \dfrac{1}{X + 1} + \dfrac{1}{X - 1}$.

Exercice 4 Dans chacun des cas ci-dessous exprimez u_n en fonction de n.

1. **(u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_3 = 2$ et $u_{11} = 0$.**
   Soit r la raison de la suite (u_n). On a $u_n = u_0 + nr$, d'où :
   $$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r \\ u_{11} = u_0 + 11r \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = u_0 + 3r \\ 0 = u_0 + 11r \end{cases}$$
   On en déduit que $8r = -2 \iff r = -\dfrac{1}{4}$ (en faisant $L_2 - L_1$) puis $u_0 = 2 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{4}$ (en remplaçant dans L_1). Pour conclure : $u_n = \dfrac{11}{4} - \dfrac{n}{4}$.
2. **(u_n) est une suite géométrique de raison q telle que : $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = 510$.**
   D'après le cours, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} u_k = u_0 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 255 \times u_0$. Or on a également $\sum_{k=0}^{7} u_k = 510$ d'après l'énoncé, d'où $255 \times u_0 = 510 \iff u_0 = 2$ et $u_n = 2^{n+1}$.

Exercice 5 Pour chacune des suites $u_n = (-3)^{2n+1}$ et $v_n = \dfrac{e^{(n+1)^2}}{e^n}$:

1. **Calculez les 3 premiers termes de la suite.**
   On trouve par le calcul :
   - $u_0 = -3$, $u_1 = (-3)^3 = -27$ *et* $u_2 = (-3)^5 = -243$
   - $v_0 = e$, $v_1 = \dfrac{e^4}{e} = e^3$ *et* $v_2 = \dfrac{e^9}{e^2} = e^7$
2. **Précisez en justifiant si la suite est géométrique ou non. Si oui, précisez sa raison.**
   - *On a :*
     $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2(n+1)+1}}{(-3)^{2n+1}} = \frac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$$
     La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 9.
   - *On a $\dfrac{v_1}{v_0} = e^3$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{e^7}{e^3} = e^4$. Or $e^4 \neq e^3$ donc la suite (v_n) n'est pas géométrique*

Exercice 6 Déterminez la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n^5 + 2n^4 + 2}$
   On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.
2. $v_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$ *On a*
   $$v_n = \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n-1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{n-1-n}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$
   On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = 0$.