

Mathématiques - Devoir Surveillé 2 - Sujet 2

Vendredi 6 avril 2018 - Durée : 1h15

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

1. Montrez que -1 est racine double de P .
2. Effectuez la division euclidienne de P par $X - i$.
3. Sans poser la division euclidienne de P par $X + i$, justifiez pourquoi le reste est forcément nul.
4. Déterminez les racines du polynôme P dans \mathbb{C} .
5. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) \quad (\star)$$

1. Soit P un polynôme qui vérifie (\star) . Montrez que le degré de P est égal à 2.
2. En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant (\star) .

Exercice 3

1. Donnez **la forme** de la décomposition en élément simples (DES) dans $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :

$$(a) F_1(X) = \frac{X^3}{1+X}, \quad (b) F_2(X) = \frac{2}{X^3 - X}, \quad (c) F_3(X) = \frac{2X+1}{X^3(X^2+1)}.$$

2. Calculez les constantes dans la DES de F_1 et F_2 .

Exercice 4 Dans chacun des cas ci-dessous exprimez u_n en fonction de n .

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_3 = 2$ et $u_{11} = 0$.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que : $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \dots + u_7 = 510$.

Exercice 5 Pour chacune des suites $u_n = (-3)^{2n+1}$ et $v_n = \frac{e^{(n+1)^2}}{e^n}$:

1. Calculez les 3 premiers termes de la suite.
2. Précisez en justifiant si la suite est géométrique ou non. Si oui, précisez sa raison.

Exercice 6 Déterminez la limite des suites suivantes :

$$1. u_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 + 2n^4 + 2}, \quad 2. v_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}.$$