Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 31 mars 2017 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3(x-3)}$$

Répondre par Vrai ou Faux sans justifier (1 point par réponse juste, -0.5 par réponse fausse).

1. La fonction f peut s'écrire $f(x) = 1 + \dfrac{x^3+1}{x^3(x-3)}$.
2. La forme de la DEs de f est $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x^3} + \dfrac{b}{x-3}$.
3. Un des éléments simples de f est $\dfrac{\frac{28}{27}}{x-3}$.
4. Un des éléments simples de f est $\dfrac{\frac{1}{3}}{x^3}$.

Exercice 2

Considérons un polynôme P défini par

$$P(X) = 2X^5 - 3X^4 - 8X^3 + 5X^2 + \alpha X + \beta$$

1. Déterminer les valeurs de α et β pour que 2 et -1 soient racines de P.

   Pour les questions suivantes on remplacera α et β par les valeurs obtenues à la quetion 1.
2. Montrer que les racines 2 et -1 sont de multiplicité 2.
3. Sachant que $(X-2)^2(X+1)^2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$, poser la division euclidienne de P par $(X-2)^2(X+1)^2$.
4. En déduire la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 *Les questions sont indépendantes*

1. Quel est le degré minimal d'un polynôme P qui verifie toutes les conditions suivantes :
   - -2 est racine simple de P,
   - 1+i est racine de multiplicité 2 de P,
   - le reste de la division euclidienne de P par X^2+1 est nul,
   - P est à coefficient réels.

2. On cherche un polynôme R, qui ne soit pas de degré 0, tel que $R(R(X)) = R(X)$.
   (a) Déterminer le degré de R.
   (b) Déterminer le seul polynôme qui réponde à l'équation : $R(R(X)) = R(X)$.

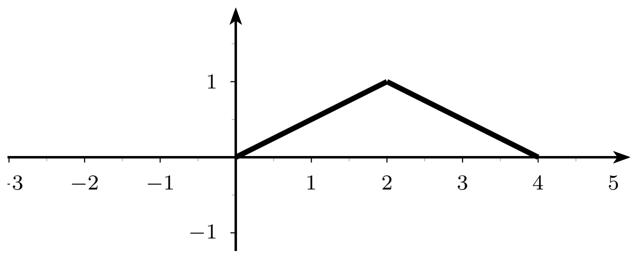
Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes par la méthode de votre choix.

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(x)dx$
2. $J = \displaystyle\int_0^{e} \frac{t}{x}dt$
3. $K = \displaystyle\int_1^{2} \frac{x^2+2}{x^3+6x-6}dx$
4. $L = \displaystyle\int_3^{4} \frac{x^3+7x^2+7x-15}{x^2+2x-3}dx.$
5. $M = \displaystyle\int_0^{1} \left(t^2-2t\right)e^{2t}dt$

Exercice 5

Soit la fonction $s(t)$ définie sur $[0;4]$ par :



1. Déterminer $\displaystyle\int_0^4 s(t)dt$
2. On note s_2 la fonction impaire définie sur $[-4;4]$ telle que $s_2(t)=s(t)$ sur $[0;4]$.
   Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^4 s_2(t)dt$
3. On note s_3 la fonction paire définie sur $[-4;4]$ telle que $s_3(t)=s(t)$ sur $[0;4]$.
   Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^4 s_3(t)dt$